Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984 | 1985
januari

Euclides 5

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Zes kennisnivo's
Een nadere uitwerking

S. P. van 't Riet

Inleiding

In een vorig artikel (Van 't Riet, 1983) heb ik een model van zes kennisnivo's beschreven ter ondersteuning van de didaktiek van de wiskunde. In dit artikel wil ik een poging wagen de rol, die dit model in het wiskundeonderwijs zou kunnen spelen, nader uiteen te zetten aan de hand van een aantal voorbeelden. Daartoe zal ik het model eerst kort samen vatten.

Het model van de kennisnivo's

Het gaat in het model van de zes kennisnivo's vooral om de aard van de in het geheugen opgeslagen informatie. Voor het wiskundeonderwijs is het nuttig zes verschillende soorten kennis te onderscheiden:

- materiële kennis;
- verbale kennis;
- konkreet-mentale kennis;
- konkreet-symbolische kennis;
- abstrakt-mentale kennis;
- abstrakt-symbolische kennis.

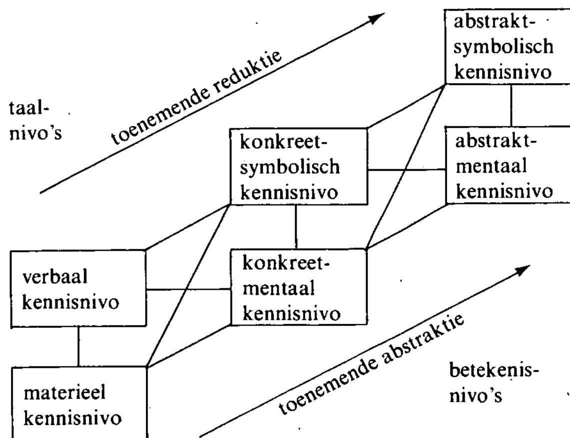
Deze zes soorten kennis zijn onder te verdelen in twee groepen: taal- en betekeniskennis. Binnen elk der groepen is een nivo-indeling aan te brengen, waarbij beide nivo-indelingen min of meer parallel lopen. In figuur 1 is het model schematisch weergegeven.

Voor het goede begrip geef ik van de zes kennisnivo's de volgende omschrijvingen met voorbeelden. Eerst behandel ik de drie betekenisnivo's (*a*, *c* en *e*), daarna de drie taalnivo's (*b*, *d* en *f*).

a Het materiële kennisnivo
De informatie van dit kennisnivo is opgedaan door middel van manipulaties met materiële voorwerpen of door middel van direkte waarneming. Men kan hier denken aan kennis opgedaan bij het manipuleren met uitgeknipte driehoeken, het verleggen van blokjes, het bekijken van figuren, enz.

c Het konkreet-mentale kennisnivo
Hier gaat het om voorstellingen, gedachtenplaatjes, welke men in het geheugen heeft opgeslagen. Deze gedachtenplaatjes of mentale schema's kunnen funktioneren zonder het direkte kontakt met materiële voorwerpen waaraan zij zijn ontleend. Wel bezitten zij nog vele kenmerken van die materiële voorwerpen. Men kan van kennis op dit nivo spreken als de leerling zich een driehoek voorstelt als een zeer bepaalde scherphoekige driehoek met horizontale basis, zonder dat alle mogelijke andere standen en vormen van driehoeken in de voorstelling een rol spelen.

e Het abstrakt-mentale kennisnivo
Hier gaat het om een voorstelling van zaken waarbij vele konkrete details die niet essentieel zijn voor een begrip, uit de voorstelling zijn verdwenen of zodanig variabel zijn dat het hele begrip in de voorstelling vertegenwoordigd is. De meetkundige lijn verliest zijn dikte. Stomp-, recht- en scherphoekige driehoeken worden tot één voorstelling verenigd, waarbij een element van variabiliteit zijn intrede doet. De voorstelling van de driehoek



Figuur 1 Schematische voorstelling van het model van de zes kennisnivo's ten behoeve van het wiskundeonderwijs.

wordt als het ware een film, waarin de driehoek alle mogelijke standen, hoekverdelingen en grootten kan krijgen.
Het zal duidelijk zijn dat het onderscheid van deze drie betekenisnivo's moet worden opgevat als gebieden op een kontinuüm en niet als diskrete toestanden. De drie betekenisnivo's staan in nauwe verbinding met de drie taalnivo's.

b Het verbale kennisnivo
Hier gaat het om kennis op het gebied van de dagelijkse omgangstaal. De woorden 'driehoek', 'zijden', 'hoeken', 'basis', 'hoekpunten', etc. spelen een rol in het spreken, schrijven en lezen over driehoeken. Een leerling zal zinnen moeten kunnen 'ontleden', er onderwerp, werkwoord, lijdend voorwerp en andere zinsdelen snel uit kunnen halen – ook zonder deze taalkundige termen uit de zinsontleding te kennen. Veel verbale kennis zal in de vorm van automatismen worden aangewend. Deze taalvaardigheid zal in het algemeen buiten het wiskundeonderwijs ontwikkeld zijn. Toch is hier enige zorg van de wiskundeleraar nodig, daar het wiskundeonderwijs tal van nieuwe elementen aan de dagelijkse omgangstaal toevoegt.

d Het konkreet-symbolische kennisnivo
Op dit nivo vindt een reduktie van de omgangstaal plaats met betrekking tot konkrete voorwerpen of begrippen. In plaats van te spreken over 'het hoekpunt links onder' voeren we voor dit hoekpunt de letter A in. A is hierbij nog de aanduiding voor een zeer bepaald hoekpunt van een zeer bepaalde (materiële of konkreet-mentale) driehoek. Tot dit kennisnivo behoren ook de aanduidingen voor getallen in de vorm van cijferkombinaties: 1, 2, 3, 3825, $5\frac{1}{2}$, 8.45, enz.

f Het abstrakt-symbolische kennisnivo
Hier gaat het om het gebruik van symbolen die niet meer naar enkelvoudige dingen of begrippen verwijzen. Deze symbolen spelen een rol bij het schrijven of spreken over grotere gehelen. In de wiskunde gaat het hier vooral om variabelen en kwantoren.

De wijze waarop de kennis van deze drie taalnivo's in de wiskunde wordt gebruikt, zal vrijwel steeds een mengelmoes zijn van elementen ontleend aan alle drie nivo's. Met name het gebruik van symbolen is bijna altijd ingebed in woorden en zinnen van de gewone omgangstaal. Verder is het duidelijk dat de kenniselementen van de drie taalnivo's hun betekenis ontlenen aan de verbindingen die er bestaan met de betekenisnivo's. Daar deze verbindingen niet vanzelfsprekend zijn, berusten op konventie en afspraak en dus geleerd moeten worden, verdient het de voorkeur de taalnivo's van de betekenisnivo's te onderscheiden, iets wat in vele psychologische verhandelingen niet gebeurt.
Het model zou kunnen suggereren dat er een paarsgewijze koppeling bestaat tussen materieel en verbaal, konkreet-mentaal en konkreet-symbolisch, abstrakt-mentaal en abstrakt-symbolisch kennisnivo. Ik zou hiervan niet willen uitgaan. Het is namelijk niet moeilijk voorbeelden te vinden die het tegendeel aantonen. Welke relaties er tussen de taal- en betekenisnivo's liggen, zal nader onderzocht moeten worden als dit model zijn bruikbaarheid voor het wiskundeonderwijs bewezen heeft. Iets van deze vraagstelling zal in het volgende aan de orde komen. Ik zal proberen duidelijk te maken hoe het model van de zes kennisnivo's de leraar kan helpen het denken en redeneren van de leerlingen te begrijpen en te beïnvloeden. Voordat ik daartoe overga, wil ik er met nadruk op wijzen dat men de kennisnivo's niet moet verwarren met de denknivo's van Van Hiele (Van Hiele, 1973, p. 91 e.v.). Gaat het bij Van Hiele om een indeling van denkwijzen of argumentaties, in het model van de kennisnivo's gaat het eerder om een indeling van die kenniselementen die bij het denken en argumenteren worden gebruikt. Om een vergelijking te maken met de bouwkunst: de denknivo's komen overeen met hutten, huizen en paleizen, de kennisnivo's met hout, spijkers, stenen, cement, glas en stopverf. Van de denkprocessen die ik hieronder ga beschrijven, kan men wellicht zeggen op welk nivo van Van Hiele zij zich afspelen. Daar is het mij nu echter niet om begonnen.

Het verloop van het denken

Het model van de zes kennisnivo's kan ons helpen het leer- en denkproces van de leerling te analyseren. Een voorbeeld hoe verschillende nivo's een rol spelen bij het leren van wiskunde, vindt men in de volgende analyse.
Een leraar vraagt aan een leerling: 'Teken eens een rechthoekige driehoek'. De leerling die deze opdracht ontvangt, zal moeten beginnen op het *verba-*

le kennisnivo. De zin zal moeten worden opgesplitst in een aantal delen, die eventueel van belang zijn om het geheel te kunnen interpreteren. In dit geval zijn het de werkwoordsvorm 'teken' en het lijdend voorwerp 'rechthoekige driehoek', welke onderscheiden moeten worden. Voorts zal 'rechthoekige driehoek' moeten worden opgesplitst in 'driehoek', het substantief, en 'rechthoekig', het adjektief. Bij de meeste leerlingen zal een dergelijke 'zinsontleding' automatisch verlopen, vooral als de zin erg eenvoudig is.
Zijn de belangrijkste bestanddelen van de zin gevonden, dan zal de leerling naar het *konkreet-mentale kennisnivo* moeten overstappen. Bij de woorden zal de betekenis noeten worden opgespoord. De werkwoordsvorm 'teken' moet het beeld oproepen van een handeling met de daarbij behorende hulpmiddelen van papier, potlood, liniaal, gum, enz. Bij de woorden 'rechthoekige driehoek' zal een konkreet-mentaal plaatje van een dergelijke figuur moeten worden gevonden: het gedachtenplaatje of het (konkreet-)mentale schema. Leerlingen verwoorden dit zoeken soms met de woorden: 'O ja, hoe zag die er ook al weer uit?' Het is niet altijd noodzakelijk dat de overstap naar het konkreet-mentale kennisnivo pas gemaakt wordt, als de opdracht op het verbale nivo geheel 'ontleed' is. Het is goed mogelijk dat leerlingen eerst de werkwoordsvorm zoeken. Het woord 'teken' roept zijn konkreet-mentale betekenis op. Daarna stappen ze terug naar de opdracht en vervolgen de verbale ontleding. Nu vinden ze dat wat er getekend moet worden: 'rechthoekige driehoek'. Een aanwijzing dat het zo kan verlopen, vinden we bij iets ingewikkelder opdrachten. Leerlingen reageren dan soms met: 'Ja, ik moet iets tekenen, maar verder snap ik er niets van!'
Als de leerling alle mentale voorstellingen gevonden heeft en tot een geheel heeft verenigd, dan zal hij in ons geval moeten overschakelen naar het *materiële kennisnivo*, waarop hij de handelingen moet beheersen om met potlood en liniaal een tekening van een rechthoekige driehoek te maken. Deze handelingen worden nu vervolgens 'gestuurd' door het konkreet-mentale schema van de rechthoekige driehoek dat hij voor ogen heeft.
Het is mogelijk dat de leerling in de figuur letters bij de hoekpunten plaatst en het ∟-teken in de rechte hoek. In dat geval heeft hij nog even het *konkreet-symbolische kennisnivo* aangedaan.

We merken op dat in dit voorbeeld het abstrakt-mentale en het abstrakt-symbolische kennisnivo niet voorkomen. Wat het abstrakt-mentale nivo betreft, ligt dit grotendeels aan de vraagstelling van de leraar. Wil de leraar er zich van overtuigen dat de leerling ook over een abstrakt-mentale voorstelling van het begrip rechthoekige driehoek beschikt, dan zal hij zoiets kunnen vragen als: 'Teken eens een paar heel verschillende rechthoekige driehoeken'. Of hij kan achteraf vragen stellen als: 'Zijn alle rechthoekige driehoeken zo klein?', 'Moet de rechte hoek altijd links onderaan zitten?', 'Kun je een scherpe hoek ook heel klein maken?', enz.

Helpen bij leren en denken

De opdracht en de oplossing die we nu besproken hebben, zijn van eenvoudige aard. Toch kan er bij het oplossen door de leerling al veel misgaan. Als de opdrachten ingewikkelder worden, zal de kans op het maken van fouten eveneens groter worden. Het is voor leraren die hun leerlingen willen helpen, van groot belang tot een goede diagnose van de gemaakte fouten te komen. Dan kan namelijk de leraar zijn hulp optimaliseren: de leerling wordt verder geholpen zonder dat hem al te veel uit handen wordt genomen. Het model van de zes kennisnivo's kan ons helpen de aard van de gemaakte fouten bij de leerlingen op te sporen.
Vele opdrachten worden gegeven in alledaagse taal of in een mengsel van gewoon Nederlands en wiskundige symbooltaal. De leerlingen zullen de opdrachtzinnen eerst moeten ontleden voor zij de opgave kunnen oplossen. Als de opgaven ingewikkelder worden en langere omschrijvingen vergen, hebben met name leerlingen met een weinig ontwikkeld taalgevoel grote moeite met het opsporen van de onderdelen van de zin. Hierbij zien zij woorden over het hoofd, schatten de positie van een woord in de zin verkeerd in, zien bijvoegelijke naamwoorden aan voor zelfstandige naamwoorden of ontdekken de juiste taalkundige relaties niet. Gevolg is dat het verdere denken tal van onoplosbare moeilijkheden ondervindt. De leerlingen raken volkomen in de war. Vaak eisen leraren, zonder er zelf erg in te hebben, heel wat van hun leerlingen op het verbale en op de andere taalnivo's.

Ook bij de overgang van het verbale naar het konkreet-mentale kennisnivo kunnen er allerlei dingen misgaan. De leerling kan bijvoorbeeld een woord of zinsdeel verbinden met een verkeerd mentaal schema. In de opgave 'Teken een rechthoekige driehoek' kan het woord 'rechthoekig' bij hem het schema van de rechthoek oproepen, of zelfs de voorstelling van gelijkbenigheid. De juiste verbindingen tussen de woorden en de mentale schema's zijn dan niet gelegd of funktioneren niet. Het is ook mogelijk dat de leerling op het konkreet-mentale kennisnivo helemaal niet beschikt over het schema van de rechthoekige driehoek of dat het zich geheel beperkt tot de zeer bijzondere met hoeken van 90°, 45° en 45°. Een andere mogelijkheid is dat de leerling een andere voorstelling heeft dan de leraar bij het woord 'teken'. Hij kan een nette tekening maken zonder liniaal en toch van de leraar te horen krijgen dat het over moet.
Een derde soort moeilijkheden kan zich voordoen bij de overgang naar het materiële kennisnivo. De leerling kan een lijnstuk dat recht moet zijn krom tekenen, omdat hij door welke oorzaak dan ook de kromming niet waarneemt. De rechte hoek kan door een onverhoedse beweging wat stomp uitvallen, of omdat de leerling de geodriehoek niet op de goede plaats weet te krijgen. Het kan zijn dat de leerling te weinig geoefend heeft in het tekenen van dergelijke figuren en dus nooit ervaren heeft aan welke eisen van nauwkeurigheid een tekening moet voldoen. In al die gevallen is zo's tekening natuurlijk geen graadmeter voor de konkreet-mentale kennis waarover de leerling beschikt.
Waar het nu voor de leraar op aankomt, is dat hij zich bij het denken van de leerling steeds afvraagt op welke kennisnivo's het zich afspeelt en welke overgangen tussen de nivo's er gemaakt moeten worden. Een leerling die fouten maakt, maakt die ergens in het denkproces. Het is dan de taak van de leraar er achter te komen, wèlke fout wáár in het denkproces wordt gemaakt. Als de leraar een goed idee heeft van alle punten waarop er iets mis kan gaan, kan hij de werkelijke fout sneller opsporen en aan het licht brengen. Daarna kan hij de leerling met een vraag of een hint op het goede spoor zetten. Stel dat de leerling na de opgave 'Teken een rechthoekige driehoek' een rechthoek tekent. Waar is dan de fout gemaakt? Misschien heeft hij het woord 'driehoek' over het hoofd gezien en het woord 'rechthoekig' als 'rechthoek' gelezen. De fout ligt dan op het verbale kennisnivo. Om er achter te komen of dit inderdaad het geval is, kan de leraar reageren met vragen als: 'Heb je de opdracht goed gelezen?'. Als de leerling daarna zijn fout niet ontdekt, ligt deze waarschijnlijk op het konkreet-mentale kennisnivo of bij de verbinding tussen dit en het verbale kennisnivo. De leraar kan nu verder gaan met vragen als: 'Is dit dan een driehoek?'. Het is mogelijk dat de leerling vervolgens een willekeurige driehoek gaat tekenen. Terug naar het verbale nivo: 'Lees nu nog eens goed', of: 'Over wat voor een driehoek gaat het in de som?', of: 'Voldoet deze driehoek aan de opgave?'. Als de leerling er niet uitkomt, kan de fout weer op het konkreet-mentale nivo liggen. Probeer dit nivo te 'prikkelen' met vragen als: 'Teken eens een rechte hoek'. Op deze manier stelt de leraar de leerling in de gelegenheid met behulp van een bekend mentaal schema het schema van de rechthoekige driehoek weer op te bouwen. De kennis op het konkreet-mentale nivo wordt op die manier tot een grotere ordening gebracht.
Het had allemaal ook anders gekund. De leraar had na de eerste poging van de leerling kunnen reageren met: 'Dat is fout. Ik zal je wel eens laten zien hoe een rechthoekige driehoek er uit ziet'. Waarna hij zelf een tekening maakt. De eigen aktiviteit van de leerling wordt dan niet gestimuleerd en het is zeer de vraag of de leerling alle kenniselementen die bij het maken van de opgave een rol spelen, tot een hechtere eenheid brengt. Men loopt als leraar met een dergelijke aanpak het risico, dat het leereffekt beperkt blijft tot het materiële kennisnivo. De leerling weet dan de figuur achteraf wel te herkennen op het moment dat hij deze ziet, maar hij is niet in staat vanuit een mentale voorstelling tot produktie van de figuur van de rechthoekige driehoek te komen. Is dit risico bij de rechthoekige driehoek wellicht nog gering, zodra figuren wat gekompliceerder worden, zal dit risico groter worden. Veelvuldig voordoen door de leraar is niet bevorderlijk voor de opbouw van een kennisbestand dat evenwichtig verdeeld is over zoveel mogelijk relevante kennisnivo's. Het wiskundeonderwijs behoort te streven naar hechte netwerken van kennis op verschillende nivo's.

Een netwerk van kennis

Vele onderwerpen uit de schoolwiskunde laten zich gemakkelijk op alle of vrijwel alle kennisnivo's behandelen. We zullen daarvan een illustratie geven met behulp van een onderdeeltje uit de goniometrie: de goniometrische verhoudingen van hoeken van 0°, 30°, 45°, 60° en 90°. We gaan er vanuit dat we daarbij het stadium van de losse rechthoekige driehoeken reeds verlaten hebben en ons bevinden in het stadium van de eenheidscirkel. Sommige leraren laten hun leerlingen de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken uit het hoofd leren:

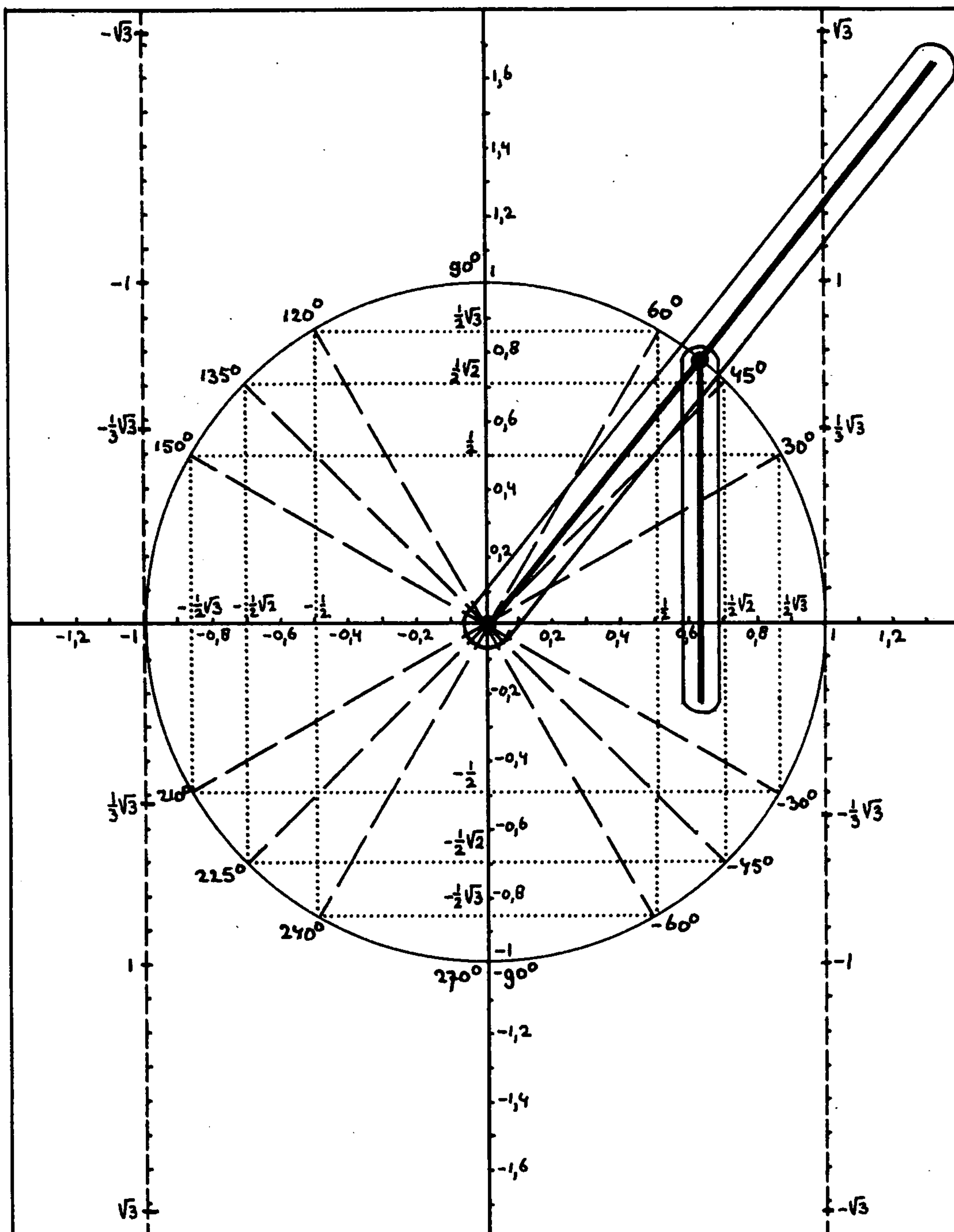
$\sin 0° = 0$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin 90° = 1$

Soms voorzien zij dit van het foefje: $\frac{1}{2}\sqrt{0}$, $\frac{1}{2}\sqrt{1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{4}$. Dit betekent dat het bezig zijn met deze goniometrische verhoudingen geheel beperkt wordt tot een aktiviteit op het *konkreet-symbolische kennisnivo*. De betekenis van de symbolen blijft vaag of gaat geheel verloren zo die er al geweest is. Dit uit het hoofd leren en zeker het gebruik van het foefje belemmert de leerling mogelijkerwijs om het onderwerp ook op de andere kennisnivo's te benaderen. Problemen ontstaan er zeker als ook de cosinus- en tangenswaarden om de hoek komen kijken. Het foefje werkt dan niet meer en de kluwen van aantallen graden, nullen, halven, enen en wortels twee en drie wordt steeds onontwarbaarder voor de leerling.

Men kan een onderwerp als dit ook heel anders aanpakken. En dan niet alleen bij de invoering der begrippen, maar ook bij het werken daarmee in een later stadium van het onderwijs. Op het *materiële kennisnivo* zijn bijvoorbeeld verschillende aanpakken mogelijk. Een daarvan is dat de wiskundeleraar in zijn lokaal een goniobord aan de wand heeft hangen, zoals afgebeeld in figuur 2. Door de beide draaiende elementen op de juiste wijze in te stellen en bij de ingestelde hoek de goniometrische waarde af te lezen verbindt men de goniometrische verhoudingen met motorische handelingen en visueel sterke indrukken. Het is duidelijk dat het werken met een dergelijk bord bij de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken alleen mogelijk is als aan twee voorwaarden is voldaan. Ten eerste moeten sinus, cosinus en tangens voor willekeurige hoeken ook met behulp van een dergelijk goniobord zijn behandeld. Ten tweede moeten de specifieke waarden bij de standaardhoeken zijn afgeleid met behulp van de tekendriehoeken. Maar als aan die voorwaarden is voldaan, kan het goniobord door de onderlinge rangschikking der bijzondere getallen op de diverse getallenlijnen een krachtig hulpmiddel zijn om het geheugen van de leerlingen te stimuleren. Het enige probleem dat nader bestudeerd zou moeten worden, is in hoeverre de komplexiteit van het bord de voorstelling van de leerling in de weg kan staan. Mijns inziens kan dat probleem worden opgelost door een goede selektie van de af te beelden lijnen en getallen en door het gebruik van verschillende lijndikten en lettergrootten.

Een andere mogelijkheid om de goniometrische verhoudingen van de standaardhoeken op materieel kennisnivo te ondersteunen is de leerlingen de eenheidscirkel met de bijbehorende hoeken en tekendriehoeken zelf te laten tekenen. Hierbij zouden zij gebruik kunnen maken van de goniomeetlat, zoals deze is afgebeeld in figuur 3. Men zou dergelijke meetlatten in verschillende lengten kunnen laten uitvoeren. Zolang ze niet op de markt zijn, kan men ze heel eenvoudig door de leerlingen zelf laten maken.

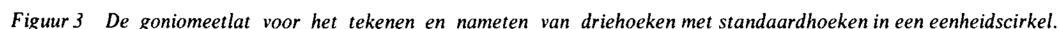
De handelingen die er ten aanzien van dit onderwerp op materieel nivo te verrichten zijn, zullen vergezeld gaan van woorden, uitdrukkingen, zinnen, enz. Het is goed tijdens het leerproces van de leerlingen ook aandacht te besteden aan het spreken in gewone omgangstaal over de dingen waarmee men bezig is. Mijn indruk is dat vele wiskundeleraren aan het *verbale kennisnivo* niet al te veel tijd besteden. Men stelt zich gemakkelijk tevreden met vragen als 'wat is de sinus?' en antwoorden als 'overstaande zijde gedeeld door schuine zijde'. Er is echter veel voor te zeggen de leerling te leren zich korrekt en volledig uit te drukken. Omschrijvingen als 'de sinus van een hoek is gelijk aan de lengte van de overstaande rechthoekszijde gedeeld door de lengte van de schuine zijde' kunnen de leerling helpen tot een scherper begrip van de zaak te komen. Het kunnen beschikken over een rijkere



Figuur 2 Het goniobord. Door het instellen van de bewegende delen kan bij elke hoek de sinus- en cosinuswaarde worden afgelezen. De tangenswaarde kan worden afgelezen voor hoeken tussen −60° en 60° en tussen 120° en 240°.

taal geeft meer mogelijkheden om de betekeniskomplexen op het materiële en mentale nivo te onderzoeken en te reproduceren.
De verwerving van materiële en verbale kennis zal er toe bijdragen dat de leerling ook op *konkreet-mentaal kennisnivo* zich de gewenste schema's en voorstellingen verwerft. Van de eenheidscirkel zal hij zich met de ogen dicht een voorstelling moeten kunnen maken. De hoeken en tekendriehoeken zal hij daar in moeten kunnen denken. Door het onthouden van drie lengten van rechthoekszijden bezit hij nu een voorstelling waaruit alle goniometrische verhoudingen van standaardhoeken snel zijn af te leiden. De konkreet-mentale voorstelling kan gematerialiseerd worden met behulp van een tekening, welke de afleiding der verhoudingen zal versnellen. Op *konkreet-symbolisch kennisnivo* zijn wat betreft de tangens enige vaardigheden in het rekenen nodig. Al het konkreet-symbolische materiaal van de sinus, cosinus en tangens van de standaardhoeken is langs deze weg gemakkelijk te reproduceren. Een sterke konkreet-mentale voorstelling, gebaseerd op materiële en verbale kennis van het onderwerp, maakt het uit het hoofd leren van rijtjes goniometrische verhoudingen tot een onnodige bezigheid. Als men de leerlingen konsekwent deze verhoudingen zelf laat berekenen langs bovengeschetste weg, dan zullen zij daarbij zelf op den duur allerlei verkortingen van het denkproces doorvoeren. Hierdoor neemt de snelheid der reproduktie toe tot een nivo dat weinig hoeft te verschillen van dat bij uit het hoofd geleerde rijtjes.
De snelheid waarmee de goniometrische verhoudingen door de leerlingen worden gereproduceerd, is niet het enige criterium en zelfs niet het belangrijkste criterium voor het kiezen van het soort leren en de leerweg waarvan men gebruik wil maken. Een veel belangrijker criterium hierbij is bijvoorbeeld de uitbreidbaarheid naar nieuwe leerstof.
Wie de aktiviteiten van de leerling voornamelijk beperkt tot het konkreet-symbolische kennisnivo (uit het hoofd leren van en rekenen met goniometrische verhoudingen van standaardhoeken), staat een aantal later in te voeren uitbreidingen van de stof ernstig in de weg. Dit begint al als men de goniometrie wil uitbreiden tot het tweede, derde en vierde kwarant. Hier is alleen nog een sterke mentale voorstelling ondersteund door materiële kennis doelmatig. Is zo'n mentale voorstelling niet ontstaan tijdens het werken in het eerste kwadrant, dan zal uitbreiding naar de andere kwadranten de grootste problemen opleveren. Een andere uitbreiding van de leerstof die alleen kans van slagen heeft als er een sterke mentale voorstelling bestaat, is die naar de abstraktere kennisnivo's. Het werken met willekeurige hoeken in alle kwadranten vereist een *abstrakt-mentale* voorstelling van de eenheidscirkel voorzien van de projektielijnen van het snijpunt van cirkel en variabel been op de beide coördinaatassen. Ook de daarbij behorende *abstrakt-symbolische* uitdrukkingen zoals $\sin\alpha = y$ en $\cos\alpha = x$ kunnen door de leerling alleen van betekenis worden voorzien met behulp van een abstrakt-mentaal schema, desnoods in een of andere vorm gematerialiseerd door middel van een tekening.

De konklusie van dit alles is dat men er in het wiskundeonderwijs verstandig aan doet een onderwerp op zoveel mogelijk kennisnivo's aan de orde te stellen en er daarbij naar te streven de kenniselementen der verschillende nivo's zoveel mogelijk in elkaar te doen overvloeien. Op die manier ontstaat een stevig netwerk van kennis, waarmee de leerling optimaal in staat is inzichtelijk te opereren.



Figuur 3 De goniomeetlat voor het tekenen en nameten van driehoeken met standaardhoeken in een eenheidscirkel.

Slotopmerking

Ik ben ervan overtuigd dat het model van de zes kennisnivo's vele implikaties kan hebben voor het doordenken van het wiskundeonderwijs. Men kan er leerstof mee analyseren en beoordelen op eenzijdigheid of veelzijdigheid van de behandeling der onderwerpen. Men kan ermee onderzoeken of sommige leerlingen gemakkelijker op het ene kennisnivo en andere leerlingen gemakkelijker op het andere kennisnivo leren. Men kan er toetsen mee konstrueren die dezelfde leerstof op verschillende kennisnivo's navragen. Tenslotte kan men bij bepaalde onderwerpen uit de wiskunde die kennisnivo's trachten te exploreren die traditioneel bij de behandeling van die onderwerpen niet of nauwelijks aan de orde komen. Dit laatste is bijvoorbeeld veelvuldig het geval ten aanzien van het materiële kennisnivo. Het materiële kennisnivo beperkt zich in ons wiskundeonderwijs voornamelijk tot de vlakke meetkunde. De wijze waarop de ruimtemeetkunde gematerialiseerd wordt, is bijvoorbeeld al niet doelmatig zonder een sterke mentale voorstelling van de behandelde ruimtelijke figuren. Vele leerlingen worden geplaagd met tweedimensionaal weergegeven driedimensionale figuren zonder een materiële, d.w.z. driedimensionale, kennis van deze figuren te bezitten. Ook de nieuwere ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, welke ik overigens van harte toejuich, hebben het materiële kennisnivo niet of nauwelijks een plaats gegund. Mijns inziens ligt hier dan ook een terrein braak voor het onderzoek van het wiskundeonderwijs.

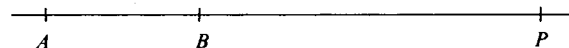
Literatuur

Hiele, P. M. van, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend, 1973.
Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs*, Euclides 58, no. 7, 1983, p. 241-247.

Waarom zou men het begrip oneindig gebruiken?

J. Scheltens

De heren Broekman en Pach hebben interessante artikelen geschreven over oneindig min oneindig en nul maal oneindig. De moeilijkheden, die zij trachten op te lossen, ontstaan mijns inziens door het gebruik van het begrip oneindig en zeker door het gebruik van het symbool ∞.
Wat betekent: $x \to \infty$? Niets anders dan dat men x onbepaald laat toenemen. De indruk wordt echter gevestigd, dat men ergens naar toe gaat (naar oneindig). Maar dat is niet zo; er is geen grootste getal.
Ik ben het dan ook niet eens met de redenering, dat $\infty - \infty$ onbepaald zou zijn. Dat is alleen waar, als men aan ∞ allerlei verschillende waarden gaat toekennen; maar waarom zou men dat doen?



Figuur 1

Nemen we de figuur 1 uit het artikel van de heer Pach. Volgens mij blijft $AP - BP$ altijd AB, hoe ver we P ook nemen. Alleen door het symbool ∞ in te voeren komen de moeilijkheden.

$\lim\limits_{x \to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x})$ is volgens mij nul, omdat $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ altijd nul is, als men x tot nul laat naderen.

$\lim\limits_{x \to 0}((\frac{1}{x} + 1) - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x \to 0}(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$. De uitkomst wordt groter en groter, als men x tot nul laat naderen.
Zo wordt $\frac{5}{x}$ nooit nul, al wordt x nog zo groot; wel nadert de uitkomst tot nul. Mijn voorstel: schaf ∞ af.

Literatuur

H. Broekman, *Euclides* 58, 82/83, nr. 9, blz. 342.
F. Pach, *Euclides* 59, 83/84, nr. 7, blz. 339.

De XXVe Internationale Wiskunde Olympiade 1984

J. M. Notenboom

De XXVe Internationale Wiskunde Olympiade werd dit jaar van 29 juni tot en met 7 juli gehouden in Praag, Tsjecho-Slowakije. In dit jubileumjaar nam een record aantal landen deel. Er waren 34 landen vertegenwoordigd, waarvan er 31 een team van zes leerlingen, het maximaal toegestane aantal, hadden afgevaardigd. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende leerlingen:

Hans van Antwerpen, Nuenen
Harold de Boer, Nijeveen
Jan de Boer, St. Nicolaasga
Wiebe Kees Goodijk, Hardegarijp
Bart de Smit, Amsterdam
Menke Ubbens, Sneek

Drie van hen behaalden een prijs: Jan de Boer een tweede prijs, Bart de Smit en Hans van Antwerpen een derde prijs. Vermeldenswaard is dat Jan de Boer en Menke Ubbens dit jaar ook deel uitmaakten van de Nederlandse afvaardiging naar de Internationale Natuurkunde Olympiade. Jan de Boer behaalde daar de eerste prijs. In het officieuze landenklassement van de Wiskunde Olympiade (geordend naar het totaal aantal punten per land) stond de Sovjet Unie op de eerste plaats met 235 punten, gevolgd door Bulgarije (203), Roemenië (199), de Verenigde Staten (195) en Hongarije (195). Nederland (93) kwam op de 17e plaats.

Het gaat bij de Internationale Wiskunde Olympiade, net als bij de Nationale Wiskunde Olympiade, om het oplossen van wiskundige vraagstukken door leerlingen van het voortgezet onderwijs. In twee zittingen van elk $4\frac{1}{2}$ uur krijgt elke deelnemer telkens drie vraagstukken op te lossen. De zes vraagstukken waren dit jaar afkomstig uit resp. West-Duitsland, Nederland, Roemenië, Roemenië, Mongolië en Polen.

In de internationale jury hadden voor Nederland zitting drs. J. M. Notenboom (SOL, Utrecht) en dr. J. van de Craats (KMA, Breda).

Organisatie en voorbereiding

Ter ere van het jubileumjaar was er door de organisatoren een kleine tentoonstelling ingericht waar, naast een groot overzicht van de resultaten van de afgelopen 24 Olympiades, veel materiaal te zien was over de Nationale Olympiades zoals die in de diverse landen georganiseerd worden. Eén van de eerste dagen van de Olympiade was grotendeels gewijd aan een symposium waarin juryleden van diverse deelnemende landen een uiteenzetting gaven over wat er in hun land georganiseerd wordt voor leerlingen die bijzonder begaafd zijn op het gebied van de wiskunde. In sommige landen bestaan speciale scholen voor begaafde leerlingen. In de meeste landen wordt een Nationale Wiskunde Olympiade gehouden met één, twee of drie ronden. Het aanzien van deze Olympiades is vooral in de Oosteuropese landen hoog. Duidelijke verschillen zijn er in de voorbereiding van de leerlingen op de Internationale Wiskunde Olympiade. De kandidaten worden gekozen uit de winnaars van de Nationale Olympiades. De voorbereiding varieert van vrijwel geen voorbereiding tot intensieve training: vaak een aantal weekends gedurende het jaar, soms een trainingskamp van meer dan een maand. De Nederlandse deelnemers worden gekozen uit de winnaars van de tweede ronde van de nationale Olympiade en worden schriftelijk via lesbrieven voorbereid. Het blijkt dat deze manier van voorbereiden voldoende is om begaafde leerlingen in staat te stellen goede resultaten te bereiken op de Internationale Olympiade.

Toekomstige Olympiades

Voor de komende jaren zijn er voldoende landen die de Olympiade willen organiseren. Zo zal in 1985 Finland gastland zijn, in 1986 Polen, in 1987 Zweden of Cuba, in 1988 Australië en in 1989 West-Duitsland. De continuïteit die een aantal jaren geleden in gevaar leek te zijn is nu gewaarborgd. Voor Nederland speelt wel de vraag van de reiskos-

ten. De afgelopen jaren konden de reiskosten beperkt blijven omdat er per trein gereisd werd. Voor een aantal bestemmingen zal de komende jaren van het vliegtuig gebruik gemaakt moeten worden. In 1988 zullen de reiskosten hoog zijn.

Klassement

Het officieuze landenklassement van de Internationale Wiskunde Olympiade, gehouden in Praag in het jaar 1984:

1	Sovjet-Unie	235
2	Bulgarije	203
3	Roemenië	199
4/5	Verenigde Staten	195
4/5	Hongarije	195
6	Groot-Brittannië	169
7	Vietnam	162
8	Oost-Duitsland	161
9	West-Duitsland	150
10	Mongolië	146
11	Polen	140
12	Frankrijk	126
13	Tsjecho-Slowakije	125
14	Joegoslavië	105
15	Australië	103
16	Oostenrijk	97
17	Nederland	93
18	Brazilië	92
19	Griekenland	88
20	Canada	83
21	Columbia	80
22	Cuba	67
23	België	56
24	Marokko	56
25	Zweden	53
26	Cyprus	47
27	Spanje	43
28	Algerije	36 (4 leerlingen)
29	Finland	31
30	Tunesië	29
31	Noorwegen	24 (1 leerling)
32	Luxemburg	22 (1 leerling)
33	Koeweit	9
34	Italië	0

Opgaven

1 x, y en z zijn niet-negatieve reële getallen waarvoor geldt: $x + y + z = 1$.
Bewijs: $0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$

2 Bepaal een paar gehele getallen a en b, beide groter dan nul, zodat geldt:
i $ab(a + b)$ is niet deelbaar door 7
ii $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ is deelbaar door 7^7. Motiveer je antwoord.

3 Gegeven zijn in het vlak twee verschillende punten O en A. Voor elk punt X van het vlak, $X \neq O$, is $\alpha(X)$ de grootte van de hoek tussen OA en OX in radialen, gemeten vanaf OA in de richting tegen de wijzers van de klok in ($0 \leqslant \alpha(X) < 2\pi$). Verder is $C(X)$ de cirkel met middelpunt O en de straal van lengte $OX + \frac{\alpha(X)}{OX}$. Veronderstel dat elk punt van het vlak gekleurd is met een kleur die gekozen is uit een eindige verzameling van kleuren. Bewijs dat er een punt Y bestaat met $\alpha(Y) > 0$ zó, dat de kleur van Y ergens voorkomt op de cirkel $C(Y)$.

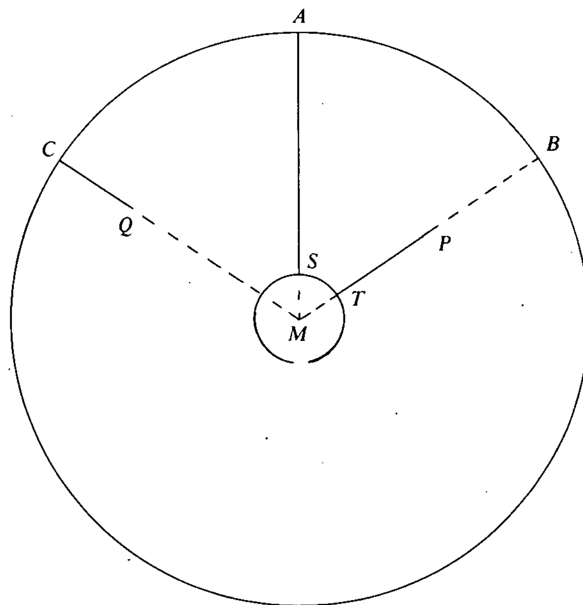
4 $ABCD$ is een convexe vierhoek waarvoor geldt dat de lijn CD raakt aan de cirkel met AB als middellijn. Bewijs dat de lijn AB dan en slechts dan raakt aan de cirkel met middellijn CD als de lijnen BC en AD evenwijdig zijn.

5 Van een convexe n-hoek in het vlak ($n > 3$) is d de som van de lengtes van alle diagonalen en p de omtrek.
Bewijs: $n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$
$[x]$ is het grootste gehele getal $\leqslant x$

6 Gegeven zijn vier oneven gehele getallen a, b, c en d waarvoor geldt:
1 $0 < a < b < c < d$,
2 $ad = bc$,
3 $a + d = 2^k$ en $b + c = 2^m$ voor zekere k en m (k en m geheel).
Bewijs: $a = 1$.

'In de wiskunde les'* Kerstvakantie

Iet Markusse



Een traditioneel nummer voor de laatste wiskundeles vóór de kerstvakantie van de 1e klas (volwassenen-onderwijs) is 'het kerstengeltje'. Van te voren vraag ik de klas of ieder een schaar wil meenemen, maar ik zeg erbij dat er ook in de laatste les gewoon gewerkt zal worden ('we hebben het veel te druk om tijd aan onzin te besteden en het is hier toch altijd al gezellig!').
Ieder krijgt een blanco vel papier en wordt verzocht de volgende opgave daarop te maken:

Neem een punt M, minstens 6 cm vanaf de kanten
Teken $\odot(M,1)$ en $\odot(M,5)$
Neem punt $A \in \odot(M,5)$
Teken AM
Neem punt $B \in \odot(M,5)$, zó dat $\angle AMB = 60°$
Teken BM
Neem punt $C \in \odot(M,5)$ zó dat $\angle AMC = 60°$
Teken CM
Neem punt $P \in BM$ zó dat $BP = 2$
Neem punt $Q \in CM$ zó dat $CQ = 2$
$AM \cap \odot(M,1) = \{S\}$
$BM \cap \odot(M,1) = \{T\}$
Knip uit: $\odot(M,5)$
Knip in: lijnstuk AS en lijnstuk CQ
Knip vanuit S $\odot(M,1)$ uit, maar laat *tegenover* S een stukje vastzitten
Begin bij T en knip in: lijnstuk TP
Teken op $\odot(M,1)$ een gezicht
Steek CQ door TP

Het resultaat van deze opgave is dan een kerstengeltje.

* Prijsvraag, zie Euclides 60, nr. 1, blz. 81.

Potlood lijnen en letters kunnen worden uitgegumd en alles kan versierd worden naar eigen fantasie, met lijm, glitter en engelenhaar. Dit kan thuis of op school gebeuren, afhankelijk van de situatie.
Misschien vinden sommige collega's het vreemd dat een dergelijke opgave in het volwassenenonderwijs gebruikt kan worden. Daarom geef ik u een aantal argumenten:

1 Ik vind het heel gezond om te laten merken dat ook volwassenen plezier mogen hebben in eenvoudige dingen.
2 Je laat zien hoe wiskunde gebruikt kan worden in huiselijke situaties.
3 Veel leerlingen worden aangesproken op hun eigen terrein: dit ontwerp wordt thuis dankbaar gebruikt om het lieve kroost in de kerstvakantie een poosje gezellig bezig te laten zijn.
4 Sommige leerlingen krijgen hiermee weer een argument(je) om aan hun eigen achterban duidelijk te maken dat volwassenen-onderwijs in 't algemeen en wiskunde-onderwijs voor vrouwen in 't bijzonder, niet bedreigend is. (ik houd altijd in mijn achterhoofd de vraag hoe ik mijn leerlingen kan helpen hun eigen achterban te overtuigen)
5 Leerlingen die het kerstengeltje kinderachtig vinden hebben toch ook een serieuze oefening gehad en nemen het grapje wel op de koop toe.

Funkties gebruiken*

Sieb Kemme

1 Inleiding

Sinds het boek van Freudenthal *Mathematics as an Educational Task*, denkt vakdidaktisch Nederland anders over de rol van funkties' in het wiskundeonderwijs. De kennismaking met het begrip funktie dient zich niet langer te beperken tot een technisch onderzoek naar de grafiek van een formeel voorschrift, maar moet ook een demonstratie zijn van de bruikbaarheid van wiskunde in realistische situaties.
Uitwerkingen van dit idee zijn terug te vinden in een aantal leerplanpublikaties van het IOWO en, hoewel zeer aarzelend, in enkele onderbouw methodes (zoals: Passen en Meten, Moderne Wiskunde herziene editie). Verandering op dit punt in het huidige wiskunde examen is tot nu toe alleen van wiskunde A in het nieuwe HEWET programma te verwachten.

In februari 1982 organiseerde het SLO een conferentie over funkties in het wiskundeonderwijs. De bijdragen werden gebundeld in: 'Conference on Functions, report 1'. Het boekje: 'In verband met...' bevat onder meer een analyse van deze bijdragen. Het heeft als ondertitel: 'een introductie op functies via verbanden'. Dit geeft al aan dat ook hier sprake is van een andere opvatting over funkties.
In dit artikel wil ik in de eerste plaats een overzicht geven van de inhoud van het boekje. Dat gebeurt in paragraaf 2. Vervolgens zal ik proberen aan te geven wat het belang van de publikatie kan zijn voor het onderdeel 'funkties' in het wiskundeonderwijs.

2 Overzicht van de inhoud

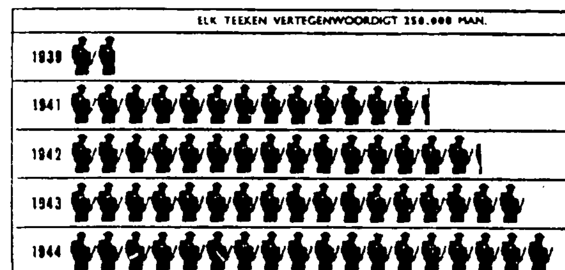
Hoofdstuk 1: Verbanden in het dagelijks leven
In dit hoofdstuk wordt op een systematische manier gekeken naar diverse facetten die aan functies en functionele verbanden zijn te onderscheiden. De indeling en keuze van deze facetten is ontleend aan de wiskunde. Bij ieder facet worden verfijningen aangebracht in deelfacetten, waarvan vervolgens per deelfacet voorbeelden worden gegeven van situaties waarin die facetten voorkomen. De globale indeling in facetten is als volgt:

1 onderdelen van functionele verbanden
2 globale en lokale eigenschappen van functionele verbanden
3 speciale functionele verbanden van een of meerdere grootheden
4 representaties van functionele verbanden

Omdat die representaties in het vervolg een belangrijke rol spelen, geef ik hier ook de verfijning van dit facet met een aantal voorbeelden van het optreden van de deelfaceetten. Dat maakt dan meteen duidelijk wat nu precies met facet en deelfacetten van functionele verbanden wordt bedoeld.

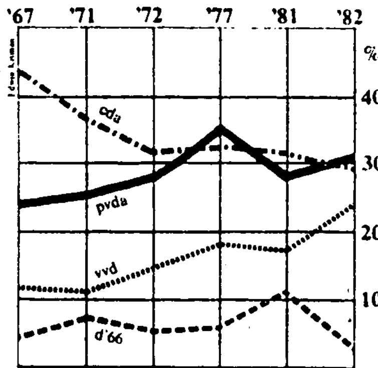
4.1 grafieken en diagrammen

GROOT-BRITTANNIE'S GEWAPENDE MACHT (op 1 Juni van elk jaar).



* Een bespreking van: 'In verband met...', (uitverkocht).

Kamerzetels 1967—1982



4.2 tabellen

buitenland verzending per SAL

Drukwerken (bedragen in guldens)

grammen	Canada	Australië/ Nieuwzeeland	grammen	Canada	Australië/ Nieuwzeeland
0-10	0,60	0,70	250-260	3.10	5.35
10-20	0,70	0,70	260-270	3.20	5.55
20-30	0,95	0,95	270-280	3.30	5.75
30-40	0,95	0,95	280-290	3.40	5.95
40-50	1,-	1,15	290-300	3,50	6.15
50-60	1,35	1,35	300-310	3,60	6,35
60-70	1,35	1,55	310-320	3,70	6,55
70-80	1,35	1,75	320-330	3,80	6,75
80-90	1,40	1,95	330-340	3,90	6,95
90-100	1,50	2.15	340-350	4,-	7,15
100-110	1,95	2,35	350-360	4,10	7,35
110-120	1,95	2,55	360-370	4,20	7,55
120-130	1,95	2,75	370-380	4,30	7,75
130-140	1,95	2,95	380-390	4,40	7,95
140-150	2,-	3,15	390-400	4,50	8,15
150-160	2,10	3,35	400-410	4,60	8,35
160-170	2,20	3,55	410-420	4,70	8,55
170-180	2,30	3,75	420-430	4,80	8,75
180-190	2,40	3,95	430-440	4,90	8,95
190-200	2,50	4,15	440-450	5,-	9,15
200-210	2,60	4,35	450-460	5.10	9,35
210-220	2,70	4,55	460-470	5,20	9,55
220-230	2,80	4,75	470-480	5,30	9,75
230-240	2,90	4,95	480-490	5,40	9,95
240-250	3,-	5,15	490-500	5,50	10,15
			boven 500 gram	0,10 per 10 gram + 0,50	0,20 per 10 gram + 0,15

Grote steden (boven 100.000 inwoners)

	K.'81	St.'82	Kamer '82	
	perc.	perc.	perc.	stemmen
Opkomst	82,5	61,3	74,9	2045482
CDA	21,4	23,8	20,6	421632
PvdA	35,5	26,5	38,4	785002
VVD	16,2	21,9	21,3	435421
D'66	11,7	8,9	4,1	84591
PSP	3,6	3,4	3,7	78436
CPN	4,3	4,3	3,7	75993
SGP	0,7	0,8	0,7	13527
PPR	2,4	2,1	2,0	40235
RPF	0,7	0,3	0,8	16479
GPV	0,6	0,5	0,6	11968
PvdA/PPR	—	1,9	—	—
psp/cpn/ppr	—	3,5	—	—
sgp/rpf/gpv	—	1,0	—	—
Overige	2,9	1,1	4,1	84268

4.3 formules

Voorbeelden van beroemde en van geconstrueerde formules.

- $E=mc^2$; $F=m.a$; $\Delta s>0$ (Tweede hoofdwet thermodynamica).
- Formule van Euler:
  H - R + Z = 2 voor een convex veelvlak.
- Trappenfomule voor een ideale trap:
  2 x optrede + aantrede = paslengte.
- Formule van Prick:
  2 + 2 (0. - I) = R op een spijkerbord.
- Verband van Fibonacci:
  $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$
- Voor die radio geldt:
  Elektriciteitsverbruik (in guldens) = 0,004 x aantal uur.

4.4 situaties

Voorbeelden van verbanden in situaties.

- Natuurkundige experimenten zoals een paar knikkers in een bakje, dat aan een liniaal hangt, veroorzaakt een doorbuiging van die liniaal.
- Als een kraan van een bad open staat, dan stijgt het water. Wordt de kraan gesloten en de stop er uit gehaald, dan zakt het niveau weer.
- De snelheid van race-auto's op een circuit wordt kleiner in bochten.
- Hoe langer je typt des te meer vouten makk je.

Hoofdstuk 2: De introductie van functies in het onderwijs

Allereerst wordt een overzicht gegeven van de introductie van functies in de gangbare schoolmethodes. Bekeken is daarbij Sigma (deel 3m), Getal en Ruimte (deel ?), Moderne Wiskunde (deel 3hv), Denken, Doen en Begrijpen, Passen en Meten, Van A tot Z (deel hv 1a). Bij dit overzicht ligt de nadruk vooral op de verschijningsvormen waarin funkties worden geïntroduceerd (grafieken, pijlendiagrammen, tabellen) en de manier waarop dit gebeurt (voorbeelden, uitleg bij definities, enz.). In de tweede paragraaf konstateren de auteurs dat de schoolmethodes ieder voor zich een eigen keuze hebben gemaakt ten aanzien van het onderwijs in

funkties en wel met betrekking tot de volgende vragen:
- wat is de *aanleiding* om je met funkties bezig te houden?
- wat is de *wiskundige kern* van het begrip funktie?
- welke *aanpak* (zowel didaktisch/strategisch als wiskundig) kies je?
- welke *voorstellingsvormen* van funkties komen voor?

Deze vragen worden vervolgens in verband gebracht met de bijdragen van de conferentie. Opvallend is daarbij de konstatering dat geen enkele spreker gekozen heeft voor 'relaties' als aanleiding voor funkties in het onderwijs. Wel werd genoemd: verbanden tussen getallen, receptachtige voorschriften en akties, veranderingen, globale beschrijving van verbanden, mathematiseerbare contexten.

Hoofdstuk 3: Ontwikkelingswerk en het pakket 'grafiekentaal'
Voor de introdukties van funkties is door het SLO een leerstofpakket 'Grafiekentaal' ontwikkeld. Daarbij is gekozen voor de volgende uitgangspunten:
- de aanpak: causale verbanden uit de werkelijkheid als instap
- de wiskundige kern: het tekenen van de globale grafiek moet het inzicht in de veranderingen vergroten
- de voorstellingsvorm: de grafiek is een kwalitatieve (= niet-kwantitatieve) beschrijving van het causale verband
- de aanleiding: grafieken zijn een efficiënt communicatie-middel
- de tijd is de onafhankelijke variabele, de andere variabele moet gemakkelijk zijn voor te stellen
- het formeel wiskundig taalgebruik wordt voorlopig uitgesteld

Deze keuzen worden toegelicht door een lijst van doelstellingen te geven en worden uitgebreid met een aantal keuzen ten aanzien van de vormgeving van het pakket. Het gebruik van de microcomputer is hierbij wel de meest opvallende keuze. Uiteindelijk wordt een schets van het pakket gegeven.

Hoofdstuk 4: Representatievormen en vertaalvaardigheden
In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de vaardigheden die een rol spelen bij het omgaan met de verschillende verschijningsvormen van funkties. Dit heeft vooral betrekking op moeilijkheden die zich voordoen wanneer van de ene naar de andere vorm wordt overgegaan, *als* bijvoorbeeld van de leerling gevraagd wordt een grafiek te tekenen bij een gegeven tabel of formule. Deze overgangs-vaardigheden worden 'vertaal'-vaardigheden genoemd. Omdat er vier verschillende verschijningsvormen van funkties zijn onderscheiden:
- grafieken en diagrammen
- tabellen
- formules/algebraïsche uitdrukkingen
- situaties

zijn er dus 16 vertaalvaardigheden. In een schema wordt een overzicht gegeven van mogelijke leerling-aktiviteiten bij deze vaardigheden.

Deze mogelijkheden worden uitvoerig uitgewerkt door voorbeelden van problemen te geven.
Tenslotte worden *uitwerkingen* van een eindexamen-opgave (LBO-C/MAVO 3, 1980) geanalyseerd op het optreden van deze vaardigheden. Dit levert een beeld op dat min of meer het tegengestelde is van dat van 'Grafiekentaal'. Ligt in Grafiekentaal het accent vooral op de overgangen: situatie → situatie, situatie → grafiek en grafiek → situatie, bij de examenopgave is dat op: formule → formule, formule → tabel, tabel → grafiek en grafiek → tabel.

3 Diskussie

Mijn opvattingen over het boekje concentreren zich rond een drietal aandachtspunten:
- de systematische benadering van het onderwerp
- de gesuggereerde gebruikswaarde van het begrip funktie
- het belang van de publikatie voor het wiskunde-onderwijs

Ik zal daarbij afzien van allerlei detailkritiek. Zo kun je je bijvoorbeeld afvragen of de lijst van verschijningsvormen van funkties wel volledig is. Op dit ogenblik vind ik het belangrijker dat een

VAN \ NAAR	SITUATIE	TABEL	GRAFIEK	FORMULE
		M O D E L B O U W		
SITUATIE	herstructureren 1	bijv. meten 2	schetsen 3	vinden v.e. formule vanuit een geconstateerd verband 4
TABEL	i n t e r p r e t e r e n — lezen en interpreteren van data 5	omvormen 6	plotten 7	vinden v.e. formule bij de gegevens in een tabel 8
GRAFIEK	interpreteren 9	aflezen van coördinaten 10	omvormen 11	vinden v.e. formule bij een gegeven kromme 12
FORMULE	herkennen v.e. formule 13	substitueren, berekenen 14	schetsen v.e. kromme 15	herleiden 16

dergelijke lijst gegeven wordt. Aanvulling daarvan zie ik als een tweede.

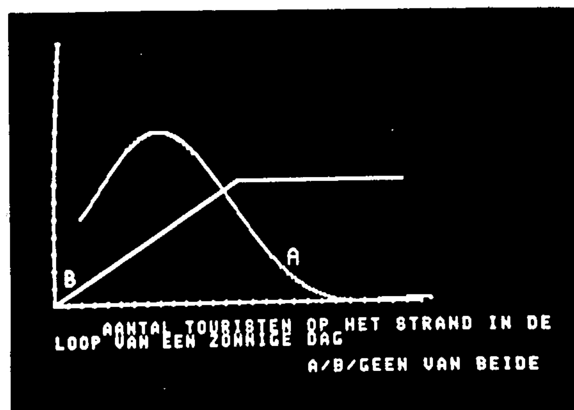
3.1 De systematische benadering

De publikatie wordt gekenmerkt door een systematische doordenking van het wiskundige funktiebegrip. Er wordt allereerst een vak-inhoudelijke analyse gegeven van het funktie-begrip en vervolgens wordt nagegaan (door middel van het vergelijken van schoolmethodes en uitspraken van derden) wat daarvan bruikbaar is bij de introduktie van dat funktiebegrip. Tenslotte leidt dit tot de konstruktie van een instrument waarmee kan worden vastgesteld welke aspekten van het funktie-begrip aan de orde kunnen komen bij een bepaalde tekst. Door deze heldere manier van werken zullen we misschien beter in staat zijn moeilijkheden bij de ontwikkeling van het funktie-begrip te traceren en wordt het misschien mogelijk om op systematische wijze naar oplossingen daarvan te zoeken. Met name de overgangen van het aanschouwelijke, voorbeeld-achtige denken naar een meer formele aanpak laten zich goed op deze manier beschrijven. Hoewel ik de indruk heb dat de systematiek van de auteurs nog onvoldoende is uitgewerkt en ze haar nut in de praktijk zal moeten bewijzen vind ik de ontwikkeling van die systematiek op zich een hele stap vooruit in het didaktische denken over het funktie-begrip. De boel staat in de grondverf, we kunnen verder.

3.2 Gebruikswaarde

De projektgroep van het SLO wil zich met het ontwikkelingswerk 'richten op wiskunde-inhouden die voortkomen uit en gebaseerd zijn op een analyse van situaties waarin een leerling zich nu of in de toekomst in het dagelijks leven kan bevinden'. Dit is een visie waarbij duidelijk de gebruikswaarde van wiskunde voorop staat. Voor het funktiebegrip is dat natuurlijk niet zo'n gekke keuze. In

de meeste wiskundige toepassingen spelen funkties in allerlei gedaantes (grafieken, tabellen, formules) een hoofdrol. De keuze van de verschijningsvorm wordt veelal ingegeven door het karakter van de toepassing. Zo zal men de posttarieven bijna vanzelfsprekend in een tabelvorm weergeven. Voor het doel: snel opzoeken van de porto-kosten bij een gegeven gewicht, is dat de meest handige rangschikking van de gegevens. Het nut van de tabelvorm bewijst zich hier door het specifieke gebruik daarvan. Dat geldt eveneens voor de andere gedaantes van funkties. Ook het nut van grafieken of formules is gekoppeld aan het specifieke gebruik. Dat specifieke gebruik sluit andere gedaantes soms uit. In de zojuist vermelde situatie van de posttarieven, zul je het wel laten om die in een formule weer te geven, tenzij je andere bedoelingen hebt, b.v.: als je een soort vuistregel wilt hebben die aangeeft wat de portokosten zijn per 100 gram gewicht. Er is dus een heel direkt verband tussen dit gebruiksaspekt en de gekozen gedaante. In een aantal voorbeelden van het boekje is dat niet zo duidelijk. Waarom is het bijvoorbeeld handig om een globale grafiek te tekenen van het aantal toeristen op het strand in de loop van een zonnige dag?



Wat doe ik daar anders mee dan met de zin: 'Tegen de middag werd het aardig druk op het strand, maar dat werd daarna (gelukkig) snel weer minder'? Ik vind zelfs dat deze zin veel begrijpelijker is en meer informatie bevat dan de globale grafiek.
De bedoeling van deze opgave is ook helemaal niet om te laten zien dat je zoiets handig met grafieken kunt weergeven, maar om leerlingen te laten oefenen in het interpreteren van grafieken. Toch vind ik dat we dan wat voorzichtiger moeten zijn met de keuze van de voorbeelden. Het wel of niet suksesvol kunnen interpreteren van een grafiek zou wel eens afhankelijk kunnen zijn van realiteitswaarde. Ik denk dat een grafiek zoals hiernaast moeilijker te interpreteren is omdat niet goed duidelijk is wat je met de grafiek wilt. Het zou de moeite waard zijn om dat te onderzoeken.
Daarnaast zou je aan de ideeën van het boekje de suggestie kunnen ontlenen dat je van een bepaalde situatie zoveel mogelijk representaties moet kunnen maken, door de gegevens in een grafiek en een tabel en een formule en een verhaal te willen beschrijven. Wat natuurlijk onzin is. Sommige zaken laat je gewoon in een tabel staan (b.v. de posttarieven), van andere gebruik je alleen de grafiek of de formule. Wil je van de ene vorm naar de andere overgaan, dan moet je daar een duidelijke reden voor hebben. Die reden ontbreekt nog wel eens in het boekje. Vaak is dat een gevolg van de gekozen situatie. Binnen die situatie bestaat de reden gewoon niet. De context werkt dan belemmerend op het oefenen van vertaal-vaardigheden. De context wordt een verpakking, een verhaal er omheen. Ik vind dat we in dergelijke situaties de suggestie van gebruiksechtheid moeten zien te vermijden, door de context bijvoorbeeld zodanig te kiezen dat duidelijk blijkt dat we met een fantasiesituatie te maken hebben die bedoeld is om het geheel wat aantrekkelijker te maken. Of door ook eens gewoon met ouderwetse 'naakte' opgaven te werken. Soms heb ik liever 'naakt dan namaak'.

3.3 Het belang van de publikatie voor het wiskundeonderwijs

De publikatie is een eerste uit een serie die nog volgt. Hoewel de projektgroep vindt dat de ideeën over funkties nog sterk in ontwikkeling zijn en het verstandiger zou zijn eerst wat meer ervaring op scholen op te doen, heeft ze toch gemeend tot publikatie over te moeten gaan, omdat het anders wel erg lang zou duren voor het onderwijs kennis kan nemen van deze ontwikkelingen. Een lovenswaardig standpunt. Maar het beperkt tegelijkertijd de waarde van de publikatie tot de kring van leerplan/stof-ontwikkelaars, lerarenopleiders en vakdidakten. Waarmee ik het belang voor leraren

niet wil uitsluiten. Maar ik denk dat dat belang om een aantal redenen nogal beperkt is. Het is allereerst nog niet goed duidelijk waar het materiaal uiteindelijk naar toe zal leiden. Een leraar die de pakketjes 'Grafiekentaal' en 'Grafieken en verbanden' wil gaan gebruiken, zal zich eerst goed moeten realiseren hoe dat valt in te passen in de bestaande funktie-lijn op school. In de tweede plaats ook is het mij onduidelijk wat het 'leereffekt' van de spullen is. Ik baseer die mening op mijn ervaringen met een tweede klas van het gymnasium, waarbij ik een bijeengescharreld pakketje over funkties gebruikte. In dat pakketje waren heel duidelijk de 'vertaal'-aspekten van de publikatie terug te vinden. Het bleek niet zo moeilijk (voor deze leerlingen) om een grafiek bij een tabel te maken, of een verhaal bij een grafiek. Veel moeilijker was het om een formule bij een situatie te vinden. Eigenlijk zijn ze met dat laatste niet zo ver gekomen, hoewel ik dat wel graag had gewild. Bovendien had ik gehoopt dat er een ontwikkeling naar een wat abstrakter, context-vrij funktiebegrip op gang zou zijn gekomen. Om dat na te gaan, had ik de leerlingen gevraagd in een opstel te beschrijven wat volgens hen een funktie was. Over het algemeen kwamen daar fragmenten uit de tekst te staan of werden er wat voorbeelden gegeven. Misschien stelde ik mijn eisen te hoog en moet je die ontwikkeling naar dat abstrakte funktie-begrip wat uitstellen, misschien was mijn pakketje niet goed genoeg of ben ik te pessimistisch in mijn interpretatie van de resultaten. Ik heb in ieder geval geen duidelijkheid gekregen over het leereffekt ten aanzien van het abstrakte funktie-begrip.
Ondanks al deze beperkingen wil ik de publikatie toch van harte bij leraren aanbevelen. Ze bevat een grote schat aan voorbeelden en ideeën die zeer illustratief zijn voor het funktie-begrip en zo in de klas gebruikt kunnen worden.

Samengevat zie ik het belang van de publikatie voor leraren als volgt:
- onduidelijk in te passen in de bestaande funktie-lijn op school
- onduidelijk ten aanzien van de ontwikkeling van het wat meer abstrakte funktie-begrip
- heel erg inspirerend materiaal.

Boekbesprekingen

A. M. Gleason, R. E. Greenwood, L. M. Kelly, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 652 blz., £28,75.

M.u.v. enige oorlogsjaren wordt sinds 1938 jaarlijks de in de titel van het onderhavige boek vermelde wedstrijd gehouden tussen teams bestaande uit gevorderde wiskundestudenten van Amerikaanse en Canadese universiteiten. In dit boek zijn de opgaven met volledig uitgewerkte oplossingen opgenomen van de wedstrijden van 1938-1964: een totaal van 347 opgaven. In vele gevallen zijn meerdere oplossingen gegeven. Vaak zijn de oplossingen voorzien van enige historische notities en/of verwijzingen naar de literatuur. De opgaven bestrijken vele gebieden van de wiskunde. Bovendien zijn er in vroegere jaren opgaven geweest op het gebied van de mechanica.
Aldus is een rijk geschakeerd boek ontstaan dat iedere wiskundige van tijd tot tijd graag ter hand zal nemen om eens enige problemen door te nemen.
Tevens is getracht de geschiedenis van de wedstrijd te vermelden. Daartoe hebben de samenstellers een viertal eerder verschenen artikelen over dit onderwerp opgenomen. Een uitgebreid register, waarin voor namen en onderwerpen naar de opgaven verwezen wordt, besluit het boek. Het geheel is niet goedkoop. Maar voor wat het biedt aan lees- en studieplezier, aan stimulans voor verdere studie, is het zijn prijs naar mijn mening waard. Zeker voor hen, die, zoals de schrijvers opmerken, met Hermann Weyl er van overtuigd zijn ... that the special problems in all their complexity constitute the stock and core of mathematics.

W. Kleijne

L. Collatz, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner Stuttgart 1981, prijs: DM 29,80, 287 pagina's.

Het betreft hier een cursus (gewone) differentiaalvergelijkingen (zowel begin- als randwaardeproblemen) voor (toekomstige) ingenieurs. Aan de orde komen existentie en eenduidigheid, lineaire d.v.'s (met periodieke coëfficiënten), eigenwaardeproblemen, speciale functies, enige lineaire partiële vgl. (o.a. eindige elementen methode), numerieke methoden.
De opzet van het boek is uiterst degelijk, de keuze van onderwerpen en de manier om tegen problemen aan te kijken wat ouderwets. Het meest bevielen mij de opgaven, die van een wat technischer karakter zijn dan men meestal aantreft in boeken over differentiaalvergelijkingen (bv. botsende treinstellen). Als algemene inleiding zeer wel geschikt, gezien de grote hoeveelheid onderwerpen die aan de orde komt, zeker wanneer men voornamelijk in min of meer klassieke onderwerpen geïnteresseerd is.

Jan Sanders

Computer simulaties in statistiek-onderwijs

Sir Bakx

In aansluiting op het vorige artikel in Euclides (Bakx (1)) over CSI-toepassingen (Computer Supported Instruction) van de microcomputer in het wiskundeonderwijs, wil ik in dit artikel nader ingaan op de mogelijkheden in het statistiek-onderwijs. De opzet is hierbij dat in de klas de computer als 'proefopstelling' staat opgesteld en toevals-experimenten simuleert. Nadat bepaalde parameters zijn opgegeven aan de computer simuleert deze in veelvoud toevals-experimenten, registreert de resultaten van de experimenten en presenteert deze tot slot in grafische of tabelvorm. De vraag is nu, waarvoor deze opstelling in klassikale opzet een didaktische ondersteuning kan bieden. Ik wil dit artikel beginnen met het op een rijtje zetten van wiskundig-inhoudelijke zaken, die ik denk nodig te hebben in het gedeelte dat gaat over mogelijke ondersteuning van het onderwijs d.m.v. simulaties.

Het kans-begrip

Wiskundig gedefinieerd is het begrip kans een afbeelding van een uitkomsten-verzameling van een toevals-experiment op het interval $[0, 1]$. Deze afbeelding heeft daarbij eigenschappen die in een stelsel van axioma's worden vastgelegd. Zoals mede Terlouw (2) opmerkt, hebben leerlingen vaak een intuïtief idee bij het woord 'kans' dat niet strookt met een dergelijke wiskundige definitie en waarop dus de axioma's niet van toepassing zijn. Men hoort in dit verband weleens spreken van 'het geloof in de kleine aantallen'. De grootte van een kans zal dus ook vaak door de leerlingen anders worden ingeschat dan wiskundig berekend wordt. Voorbeeld: wanneer bij vijf keer werpen van een (zuivere) munt het resultaat vijf keer 'munt' bleek te zijn, wordt de kans dat de zesde keer een 'kruis' wordt geworpen groter dan 1/2 ingeschat.

Voor het vaststellen van de maat voor de kans op een gebeurtenis gebruiken we twee manieren van berekenen.

1 De *a-priori* berekening: als een gedachtenexperiment N mogelijke, wederzijdse exclusieve en even waarschijnlijke, uitkomsten heeft en als in N_A keer van deze uitkomsten gebeurtenis A zich voordoet, dan is de kans op deze gebeurtenis $P(A) = N_A/N$. De grootte van de kans wordt dus vastgesteld vóórdat enig experiment plaatsvindt. Belangrijke vooronderstelling hierbij is dat op basis van symmetrie en/of homogeniteit, of iets van dien aard, sprake kan zijn van even waarschijnlijke uitkomsten. De berekening valt of staat met deze vooronderstelling (zuivere munt?).

2 De *a-posteriori* schatting: als een experiment N keer onder identieke omstandigheden wordt uitgevoerd en gebeurtenis A doet zich N_A keer voor, dan is de kans op deze gebeurtenis $P(A) = \lim_{N\to\infty} N_A/N$. De grootte van de kans wordt vastgesteld na experimenten, die telkens onder identieke omstandigheden worden uitgevoerd. De schatting valt of staat weer met deze vooronderstelling.

Op het eerste gezicht lijken computer-simulaties in het kader van de tweede definitie een rol te kunnen spelen. Verder kun je ook gaan denken aan het met elkaar in verband brengen van beide definities.

De Monte-Carlo simulatie

Ik wil eerst wat meer ingaan op het simuleren zelf. De zogenaamde Monte-Carlo-methode van simuleren van toevals-experimenten bedient zich van een reeks toevalsgetallen. Een toevalsgetallengenerator levert telkens één van de cijfers 0 t/m 9 of een van de cijferparen 00 t/m 99, of drietallen, etc.. De kans op een bepaald (tweetal, drietal, etc.) cijfer(s) dient telkens even groot te zijn (het betreft hier trekking met teruglegging). Hiermee kan een bepaald experiment gesimuleerd worden, als we in staat zijn de mogelijke gebeurtenissen van het

experiment af te beelden op de mogelijke cijfers en wel overeenkomstig een verhouding die overeenkomt met de kans op de betreffende gebeurtenissen. Met andere woorden, van het probleem moet het volledige stochastische model bekend zijn voor het gesimuleerd kan worden. Dat wil zeggen dat het volgende gespecificeerd moet worden:

- naar welk toevals-experiment het probleem vertaald kan worden (in principe herhaalbaar),
- welke uitkomstenverzameling daarbij hoort (nietleeg, één-éénduidig af te beelden op de uitkomsten van het experiment),
- welke gebeurtenis beschouwd wordt (deelverzameling van de uitkomstenverzameling),
- hoe groot de kans is op de gebeurtenis.

Dit model wordt afgebeeld op het experiment 'het trekken van een toevalsgetal', waarna het experiment in veelvoud, gesimuleerd, herhaald kan worden. De resultaten hiervan worden verzameld en verder geïnterpreteerd.

Het simuleren van toevals-experimenten op deze wijze met de computer heeft een aantal voordelen. Op de eerste plaats is het, vanwege de snelheid van handelen van de computer, mogelijk in een kort tijdsbestek het experiment daadwerkelijk een groot aantal keren te herhalen, de resultaten geautomatiseerd te verzamelen en uiteindelijk overzichtelijk te presenteren ter verdere interpretatie. Op de tweede plaats houdt men mogelijke 'ruis' bij het experimenteren onder controle; het experiment kan niet 'bedorven' worden door irrelevante variabelen.

De computer fungeert bij de simulatie o.a. als generator van toevalsgetallen. Over de kwaliteit van de computer in deze hoedanigheid verderop meer.

De wet van de grote aantallen

Omdat er sprake is van het in veelvoud herhalen van een experiment is het relevant te kijken naar de 'wet van de grote aantallen'. Deze kan als volgt geformuleerd worden. In een reeks van N onafhankelijke experimenten, elk met een kans p op succes, convergeert de fraktie successen f_N voor $N \to \infty$ *stochastisch* naar p. Een andere manier van formuleren is, dat de kans op grote afwijkingen van de verwachte waarde met toenemende N steeds kleiner wordt. Of nog anders bekeken: Definieer het experiment 'N keer onafhankelijk herhalen van een experiment, waarbij de kans op succes p is'. (Noem dit het N-experiment). Dit experiment levert een fraktie successen op f_N. Wanneer we dit experiment veelvoudig (M keer) herhalen, levert dit een veelvoud aan waarden van f_N op. (Noem dit het M-experiment). Al deze waarden vertonen een zekere spreiding, uit te drukken in de standaard-deviatie. Wanneer het M-experiment herhaald wordt met een grotere waarde van N, zal weer een veelvoud aan waarden van f_N ontstaan, nu echter met een kleinere spreiding, resulterend in een kleinere standaarddeviatie. Met toenemende N zal de standaard-deviatie steeds groter blijven dan 0, maar naderen tot 0. Met andere woorden: men kan de wet van de grote aantallen met behulp van het bovenbeschreven experiment, gesimuleerd met een computer, laten zien (Computer Supported Instruction). Dat een computer wel geboden is volgt uit het feit dat veelvoudig (M keer) een experiment wordt herhaald dat het veelvuldig (N keer) herhalen van een experiment inhoudt!

Dat afwijkingen van de verwachte waarde (p) met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid mogelijk blijven, moge blijken uit de volgende konstatering. Definieer het toevalsexperiment: $2n$ keer werpen van een zuivere munt. Vraag: hoe groot is de kans dat in de helft van de gevallen (n keer) het resultaat kop is?

Antwoord: $\binom{2n}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{2n}$.

Vraag: wat is $\lim_{n \to \infty} \binom{2n}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{2n}$?

Antwoord: 0.

Het gebruik van simulaties

Met betrekking tot een mogelijke ondersteuning door de computer van statistiek-onderwijs wil ik een drietal beweringen doen.

Bewering:
het simuleren van experimenten is geen geschikt hulpmiddel om te laten zien hoe groot een a-priori te bepalen kans is.

Hiermee wordt bedoeld, dat het onjuist/onmogelijk is om bijvoorbeeld d.m.v. (een simulatie van)

het werpen van een dobbelsteen aan te tonen dat de kans op het werpen van 2 ogen 1/6 is. Uit het voorgaande zijn daarvoor twee redenen te halen. Op de eerste plaats kun je een toevalsexperiment alleen dan simuleren als het volledige model voor de situatie wordt ingevoerd, dus ook dat de kans op een worp van 2 ogen 1/6 is. (Wat je wil laten zien, stop je erin). Op de tweede plaats kun je verwachten dat het resultaat van de simulatie afwijkt van 1/6 en zal het toch op basis van het model 'naar 1/6 gepraat moeten worden'. Het is dus een onjuiste manier van het met elkaar in verband brengen van a-posteriori en a-priori definitie van de toevalsmaat.

Bewering:
het simuleren van experimenten is, als didaktisch hulpmiddel, geschikt om het mogelijk 'gedrag' van random steekproeven te demonstreren.

Ik denk hierbij aan de opzet zoals boven bij de wet van de grote aantallen is beschreven. Het nemen van een random steekproef ter grootte van N kan gesimuleerd worden. Dit, vervolgens, kan een aantal keren (M) herhaald worden. Een aantal van dergelijke simulaties in CSI-opzet met kleine steekproef-grootte (N) bevordert al een gezonde skepsis t.o.v. steekproeven. Men kan laten zien dat het nemen van een willekeurige steekproef tot slechts een van meerdere mogelijke resultaten leidt. Uit een verdeling van de M resultaten kan men dan een idee opdoen over welke uitslag van een steekproef zich dusdanig weinig voordoet in de M herhalingen, dat deze, met een zeker risico, als 'erg onwaarschijnlijk' (maar mogelijk) bestempeld mag worden. Dit heeft natuurlijk iets te maken met het op basis van een steekproef verwerpen van een nulhypothese: $H_0: p = p_0$, $H_1: p \neq p_0$ (of $p < p_0$, of $p > p_0$). De vraag immers die luidt: 'hoe groot is de kans op deze f_N in deze steekproef, als de kans op de betreffende gebeurtenis p_0 is', wordt hopelijk beantwoord met de konstatering: 'zodanig klein dat met een klein risiko (5%, 1%?) kan worden aangenomen dat de kans niet p_0 is'. Het achterliggende gedachtenexperiment kan men feitelijk in de klas middels een simulatie uitvoeren: voer het model met $p = p_0$ in en herhaal het nemen van een steekproef ter grootte N in veelvoud.
Men kan verder gaan (extra leerstof?) en het experiment voor verschillende waarden van p_0 herhalen en uit de resultaten konkluderen voor welke waarden van p_0 een bepaald steekproefresultaat aannemelijk is. Hiermee zijn we beland bij het onderwerp betrouwbaarheidsinterval van p op basis van steekproefresultaat f_N: een generaliserende konklusie naar de populatie op basis van de steekproef. (Denk aan bijvoorbeeld voorspellen van verkiezings-uitslagen).
Simulaties zijn dus voor deze onderwerpen een konkrete basis voor de abstrakte gedachtengang, waarbij het mogelijk gedrag van steekproeven een rol spelen. Dat alleen een computer in aanmerking komt als hulpmiddel voor deze experimenten, kan men afleiden uit het grote aantal keren dat 'getrokken moet worden' ($M \times N$ keer).

Bewering:
Het begrip van een stochastisch probleem wordt bevorderd door er een computer-simulatie voor op te zetten.

Ik behandel hier alleen problemen die overeenkomen met het experiment: trekken met teruglegging. Het is soms moeilijk om leerlingen ervan te overtuigen dat een bepaalde benadering van een probleem niet korrekt is en een andere wel. Nu is bij de beschrijving van de Monte-Carlo methode al aangetoond dat, voor een simulatie mogelijk is, het volledige stochastische model van het probleem bekend moet zijn. Telkens dus als een leerling, of de klas en de leraar, een computersimulatie opzet, wordt een zorgvuldige en volledige analyse geeist van het probleem. Dat alleen al werpt zijn vruchten af en maakt de feitelijke simulatie vaak van secundair belang.
Het 'projekt' ter oplossing van het probleem ziet er dan als volgt uit:
- zet het te simuleren gedachtenexperiment op en leg de benodigde parameters voor de simulatie vast,
- bereken de a-priori kansen,
- simuleer het experiment (eventueel) en vergelijk de daaruit voortvloeiende schatting met de berekende kans.

Voorbeelden: (uit: Reinhardt & Leftsgaarde (3))
1 Van een gezin met twee kinderen is bekend dat één van de kinderen een jongen is. Hoe groot is de kans dat er in het gezin ook een meisje is?
2 Van een gezin met twee kinderen is bekend dat de

oudste een jongen is. Hoe groot is de kans dat er in het gezin ook een meisje is?

Welk simulatie-experiment kan voor elk opgezet worden? Er is sprake van een gezin van twee kinderen. Ten behoeve van het stochastische model kunnen we dus het experiment in gedachten nemen: het trekken van een gezin uit de populatie van gezinnen met twee kinderen. Dan kan het eerste kind een jongen of een meisje zijn, zo ook het tweede kind. We veronderstellen de kans op een jongen bij elke geboorte op 1/2 (a-posteriori geschat en afgerond), zo ook voor een meisje. Dit alles beelden we af op onze simulator, middels het experiment: het trekken van een tweetal toevalscijfers. Het eerste cijfer stelt dan het oudste kind voor, het twee cijfer het jongste kind. De beide geboortekansen beelden we als volgt af: cijfer 0 t/m 4 stelt een jongen voor, cijfer 5 t/m 9 een meisje. Het trekken van het tweetal 83 stelt dan een gezin voor waarin het oudste kind een meisje is en het jongste een jongen. Door tellen kun je nu al bepalen wat de kans is op een gezin van bijvoorbeeld jongen-meisje of bijvoorbeeld meisje-jongen (resp. oudste en jongste kind): elk 25 van de 100 mogelijke uitkomsten, dus 1/4. (Dit inzicht maakt dat de afbeelding op de cijfers kan worden vergemakkelijkt: bijvoorbeeld 00-24 is jongen-jongen, 25-49 is jongen meisje, enz.)

Nu kijken we verder naar de vraagstukken.

ad 1 Gegeven is dat een van de kinderen een jongen is. Dat wil zeggen dat we het model moeten aanpassen en dat de populatie waar we uit trekken bij ons experiment niet bestaat uit 100 mogelijke uitkomsten, maar 75: niet beide cijfers mogen groter of gelijk aan 5 zijn, tenminste een van beide moet kleiner zijn dan 5. (Tel maar.) De vraag luidt nu: hoe groot is de kans dat er in het gezin ook een meisje is? Dit is in de gezinnen met samenstelling jongen-meisje of meisje-jongen, dus in 50 van de 75 gevallen. De kans is dus 2/3. Een simulatie zal een resultaat leveren dat in de buurt van 2/3 ligt.

ad 2 Gegeven is dat de oudste een jongen is. Dit houdt in dat het eerste cijfer van het tweetal een cijfer van 0-4 is. In dit model trekken we uit 50 mogelijke combinaties. Hoe groot is de kans op een meisje? Antwoordt: in 25 gevallen is het tweede cijfer er een van 5-9, dus de kans is 1/2. Een simulatie kan 'dit bevestigen' en bijdragen tot 'het gevoel voor toeval'.

Het 'Monte-Carlo model' is algemeen toepasbaar (bij trekking met teruglegging) en kan daarom als algemeen hulpmiddel worden aangeboden voor een mogelijk beter begrip van een probleemsituatie (vraagstuk).

De computer als simulator

In genoemde gevallen fungeert de computer op de eerste plaats als generator van toevalsgetallen. Er moet daarbij als het ware getrokken worden uit een uniforme verdeling: de kans op elk cijfer moet even groot zijn. Hoe dit nu te realiseren? Een eenvoudige procedure bedient zich van de volgende recursieve relatie: $x_n = (a \cdot x_{n-1} + b)$ modulo m, waarbij bijvoorbeeld $a = 24298$, $b = 99991$ en $m = 199017$. Met willekeurige startwaarde x_0 levert de formule $r = x_n/m$ een (quasi-)toevalsgetal, waarbij $0 \leqq r < 1$. Wil men een generator voor de cijfers 0-9, dan zorgt daarvoor de formule $r' = [10r]$ (entier); voor tweetallen komt de formule $r' = [100r]$ in aanmerking, enz.. Wanneer het voor een simulatie nuttiger is telkens een willekeurig geheel getal tussen g_1 en g_2 te trekken, kan men de formule gebruiken:
$r' = g_1 + [(g_2 - g_1 + 1) \cdot r]$; dan geldt:
$g_1 \leqq r' \leqq g_2$. De microcomputers die met BASIC geprogrammeerd worden, kennen als een toevalsgetallen-generator in de vorm van de standaardfunktie RND(0).

Het statement

```
TGETAL = RND(0)
```

levert als resultaat $0 \leqq$ TGETAL < 1.

Het statement

```
TGETAL = INT((G2 − G1 + 1) ×
        × RND(0)) + G1
```

levert als resultaat G1 $\leqq$ TGETAL $\leqq$ G2.

De vraag is nu natuurlijk of deze toevalsgetallengeneratoren de noodzakelijke vooronderstelling waar kunnen maken dat elk cijfer (of groep van cijfers) gelijke kans heeft te worden gegenereerd. Een eenvoudige test daartoe kan de volgende zijn. Als men een groot aantal keren (n) een cijfer trekt (ik beperk me even hiertoe), zou men op basis van genoemde vooronderstelling verwachten dat elk cijfer $n/10$ keer voorkomt. Stel dat we cijfer i in die n keren t_i keren hebben getrokken.

(cijfer)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
(verwacht)	$n/10$	$n/10$	..	..	..	$n/10$	..	..	..	$n/10$
(resultaat)	t_1	t_2	..	..	..	t_i	..	..	..	t_{10}

Het verschil $(t_i - n/10)$ zou een maat kunnen zijn voor de ernst van de afwijking van het verwachte aantal. Omdat we een beeld willen hebben van de ernst van de afwijking over de cijfers gezamenlijk, zouden we deze verschillen kunnen optellen $(\Sigma(t_i - n/10))$. We tellen dan echter in het algemeen positieve en negatieve getallen op en het resultaat kan zelfs nul zijn. Dat moeten we dus niet doen. Laten we daarom de verschillen eerst kwadrateren en dan pas optellen: $\Sigma(t_i - n/10)^2$. Deze maat is al beter. Nu is het natuurlijk zo dat, wanneer de verwachte waarde klein is, een bepaald verschil ernstiger is dan wanneer de verwachte waarde groot is (vergelijk 95-100 en 995-1000). Laten we daarom niet de gekwadrateerde verschillen optellen, maar de relatieve gekwadrateerde verschillen t.o.v. de verwachte waarde. De aldus ontwikkelde maat is:
$\Sigma((t_i - n/10)^2/(n/10))$ $(= \Sigma(t_i^2/(n/10)) - n)$. Hoe groter deze maat is, hoe zwakker onze veronderstelling is dat elk cijfer gelijke kans heeft van trekken. Deze toets staat in de statistiek bekend als de χ^2-toets. Er zijn dan ook tabellen die aangeven hoe groot de maat moet zijn opdat de veronderstelling niet meer houdbaar is.
We zijn dus bezig met een verwerping, al dan niet, van een soort nul-hypothese. Ook hier hebben we dan ook te maken met een onbetrouwbaarheidsdrempel α, die we kunnen kiezen: $\alpha = 0{,}1$ of $\alpha = 0{,}05$ of iets dergelijks. Zo is bij onze tien cijfers (voor de kenners $df = 9$) en $\alpha = 0{,}1$ de kritische waarde van bovengenoemde maat 14,684 (en bij $\alpha = 0{,}05$ 16,919). Dat wil dus zeggen dat als de berekende χ^2-waarde groter is dan 14,684 onze veronderstelling verworpen wordt.
Op deze gedachtengang zijn nog twee dingen aan te merken. Het eerste is het volgende. Het betreft hier toevalsgetallen en we moeten dus niet verbaasd zijn als de χ^2-waarde van steekproef tot steekproef verschilt. De toets zal dus vaak herhaald moeten worden om er een idee van te krijgen of de veronderstelling vaak verworpen wordt of juist niet. De tweede opmerking is, dat we met deze toets eigenlijk niet uit zijn op het verwerpen van de nulhypothese, maar op bevestiging. We lopen bij bevestiging niet het risico dat door α tot uitdrukking wordt gebracht (H_0 is waar, H_0 wordt verworpen). Het risico dat we lopen bij bevestiging van de nulhypothese wordt in de statistiek een fout 'van de tweede soort' genoemd en wordt tot uitdrukking gebracht met de letter β (H_0 is niet waar, H_0 wordt niet verworpen). De relatie tussen α en β is, dat deze een complementair gedrag vertonen: is α relatief groot dan is β relatief klein, en andersom. Het is dus in ons geval zaak α niet te klein te kiezen: eerder 0,1 dan 0,05. Enig gereedschap om de toevalsgetallengenerator te testen is hiermee aangeboden.

Het simulatie-programma

Voor het simuleren van een toevals-experiment is het nodig het stochastische model af te beelden op de toevalsgetallengenerator. Dat wil zeggen dat de computer zodanig geprogrammeerd moet zijn dat eerst de nodige parameters ingevoerd kunnen worden.
Deze zijn:
- het domein van de getallen waaruit (at random) wordt getrokken (bijvoorbeeld: 0..9 of 00..99 of 00..74, i.h.a. $g_1..g_2$),
- de gebeurtenissen die worden onderscheiden (bijvoorbeeld: (bij geboorte) jongen/meisje, (bij dobbelsteen) worp = 1/worp = 2/worp = 3/worp = 4/worp = 5/worp = 6),
- het deel van het domein getallen waarop elke gebeurtenis wordt afgebeeld, overeenkomstig de kans op de gebeurtenis (bijvoorbeeld: gezin van 2 jongens: 00..04 + 10..14 + 20..24 + 30..34 + 40..44, enz.),
- het aantal keren dat het toevals-experiment moet worden uitgevoerd (bijvoorbeeld: 1000).

Bij de simulatie van veel steekproeven trekken is de laatste parameter de steekproef-grootte en zal nog ingevoerd moeten worden:
- het aantal keren dat de steekproef getrokken moet worden.

Met deze parameters moet het computerprogramma:
- telkens (bijvoorbeeld 1000 keer) een toevalsgetal uit het domein ($g_1..g_2$) trekken,
- bepalen tot welk gebeurtenis-domein dit getal behoort,

- voor elke gebeurtenis bijhouden hoeveel keer een tot dat domein behorend getal werd getrokken,
- het eindresultaat (eventueel ook tussenresultaten) van de tellingen (aantallen, percentages, frakties) presenteren op een overzichtelijke (en leuk ogende?) wijze.

Bij het veelvoudig steekproef-trekken is het eindresultaat een van de mogelijke waarden, die samen met de volgende waarden gepresenteerd moet worden.

Met deze specificaties zijn gemakkelijk programma's te schrijven die de bovenbedoelde taken in CSI-opzet kunnen vervullen. (Een voorbeeld-listing kan door de belangstellende lezer aangevraagd worden).

Literatuur:

1 Bakx G. J. T. A., 'De computer in het wiskunde-onderwijs: een verkenning naar niet-CAI/CMI toepassingen', *Euclides*, 58-6, februari 1982/1983.
2 Terlouw, P., 'Problemen bij het onderwijzen en leren van kansrekening en statistiek', *Euclides*, 57-10, juni/juli 1981/1982.
3 Reinhardt, H. E. & Loftsgaarden, D. O., '*Using simulation to resolve probability paradoxes*', Int. J. Math. Educ. Sci. technol., 1979, v10, n2, 241-250.

Boekbesprekingen

Rudolf Halin, *Graphentheorie II, Erträge der Forschung*, Band 161, Darmstadt 1981, ruim 300 pp.

Deel I is hier eerder besproken (en is nodig bij deel II i.v.m. notaties en verwijzingen). Ook nu zijn karakteristieken: een kleine doorsnede met andere boeken door de keuze van onderwerpen en het nadrukkelijk mede beschouwen van oneindige graphen, een kompakte maar toch heldere schrijfwijze, en verbreding en verdieping door het vermelden van naast- of verderliggende resultaten. Een gedegen leidraad dus, waarvan elk hoofdstuk als een kleine monografie mag gelden en die veel studiemateriaal biedt (niet van de makkelijkste soort) en bovendien opgaven. Onderwerpen zijn dit maal: Planaire graphen (Kuratowski, MacLane, Kleuring, Hamiltonprobleem), Matroïden (een gedegen inleiding, stellingen van Tutte, verbanden met en toepassingen op graphen), Groepen (Cayley, Frucht, Babai), Simpliciale ontbinding (in 'priemgraphen', homomorfiebasis, graphen van partiële ordeningen, intervalgraphen), n-voudige samenhang (i.h.b. minimale n-voudig samenhangende graphen. Een aanhangsel attendeert nog op enkele andere probleemgebieden. Geschikt voor serieuze zelfstudie, voor een seminarium en om wat na te slaan. Prijs DM 39,50, wat gezien het gebodene laag is.

R. Jeurissen

K. H. Kim, F. W. Roush, *Applied abstract algebra*, Uitg. Ellis Horwood Ltd., Chichester, England, 265 blz., £ 25,–.

De titels van de hoofdstukken uit dit boek zouden kunnen doen vermoeden dat het hier gaat over een vrij traditionele behandeling van de algebra: Sets and binary relations; Semigroups and groups; Vector spaces; Rings; Group representations; Field theory. Niets is minder waar. De in de genoemde hoofdstukken gepresenteerde stof wordt op een uiterst moderne manier behandeld, waarbij onderwerpen van recente datum en vele illustratieve toepassingen aan de orde komen. Toepassingen op het gebied van automaten-theorie, mathematische linguïstiek, sociologie, symmetrieën in de natuurkunde en op het gebied van de meetkunde, meetkundige constructies etc. Van de onderwerpen die dikwijls niet, maar in het kader van de algebra in dit boek wél aan de orde komen, noem ik: semi-groepen, Boolesematrices, gerichte grafen, netwerktheorie, representatie van groepen. Al deze onderwerpen en toepassingen zijn naast de zeer vele voorbeelden met uiterste zorg gekozen. Ze zijn van groot belang voor de toepassingen van de algebra. Na ieder afgerond stukje stofbehandeling hebben de schrijvers een aantal opgaven opgenomen, verdeeld in drie niveaus van moeilijkheid. Het boek wordt besloten met een lijst van 'Open problems', een lijst met gebruikte symbolen, een literatuurlijst en een index.
Samenvattend: een zeer goed verzorgd boek, dat een prima inleiding geeft in toegepaste algebra.

W. Kleijne

Docentenbijscholing HEWET

Tineke Brinkman

Interview met een docente HAVO/VWO wiskunde en computerkunde, die tot nu toe wel wat voorlichting heeft ontvangen, maar daarnaar niet speciaal gezocht heeft.

Wat zijn je verwachtingen t.a.v. wiskunde A?
't Zou kunnen zijn dat wiskunde nu net zo moeilijk wordt om te geven als computerkunde, want het programma is experimenteel en nog niet uitgekristalliseerd èn je bent er niet in opgeleid. Kun je wel de methode kiezen die 't beste past bij je sectie/je school?

Je ziet er tegenop, hè? Je hebt er niet zo'n zin in; waaraan ligt dat?
Het prettig-steriele, aangenaam-abstracte van de huidige wiskunde zal ik erg missen. Wiskunde A problemen hebben haken en ogen die je bij een volstrekt abstract probleem niet tegenkomt.
Wat betreft de motivatie van de leerlingen heb ik ook ambivalente gevoelens: wiskunde moet voor haar voorbeelden en toepassingen gaan lenen bij economie, natuurkunde, het wegverkeer, enz.; dus bij vakken en onderwerpen die elders thuishoren. *Vroeger* leerde je bij wiskunde het gereedschap kennen dat je bij natuurkunde, aardrijkskunde enz. kon gebruiken en toepassen. Bij wiskunde concentreerde je je op het vak zelf – bij andere vakken kwamen de toepassingen. *Nu* zijn de toepassingen de praktische kapstokken om te gaan kijken hoe je erover kan denken: wiskunde wordt nuttiger.

Kun je proberen om je weerstanden nog wat specifieker te formuleren?
Het lesgeven in de nieuwe vorm zal zeer inspannend zijn vanwege de ontmoetingen met de maatschappelijke kant en de uitweidingen die dan mogelijk van je verwacht worden.
- Er is ook een leeftijdsprobleem. Ik geef ook les vanuit mijn ervaring in m'n eigen middelbare schooltijd. Voor wiskunde A zijn er bij mezelf geen referenties; er zijn geen (aangename) herinneringen.
- Ik heb het gevoel dat in die toepassingen het wezenlijke niet zit. Neem het Eb en Vloedprobleem: daarmee houd je op voordat je aan de interessante details toekomt. Wiskunde A wordt te breed – en dus te oppervlakkig. Daarmee vermindert voor mij het genoegen van het lesgeven – en daarbij verwacht ik dat de inspanning groter wordt. Het fundamentele probleem van de 'oppervlakkigheid' kan niet worden opgelost.

Wiskunde A is voor mij:

Overal ruiken
en nergens een maaltijd krijgen

Het is dus belangrijk dat je eigen referenties gaat opbouwen m.b.t. dit materiaal. Hoe zou je dat denken? 'Klasje spelen?'
Nee, dan gaan al mijn haren verkeerd staan!

Hoe dan?
Docenten moeten leren wat een regisseur moet leren. Daartoe kun je stage lopen bij een goede regisseur, waarbij je ernaast mag zitten en je mond houden, en dat gedurende twee jaar. Een half jaar ben je enthousiast, een jaar verveel je je, en daarna nog een half jaar om je tot het uiterste in details te verdiepen.

Dat kan dus niet. Wat dan wel?
'Kijken naar' is voor mij heel belangrijk. Je zou een situatie moeten creëren waarin je het onderwijsleerproces in de nieuwe vorm kunt zien. Ik heb wel een *voorstel.*
Stel je hebt op de cursus 20 mensen. Je deelt die groep in tweeën. 1 speelt docent, 9 spelen leerling; 10 maken zich volstrekt 'onzichtbaar' en schrijven alles op wat hen opvalt in het onderwijsleerproces tussen die andere 10. Dit alles gedurende de eerste helft van de cursusmiddag, b.v. gedurende een uur. In de tweede helft moet je met elkaar uitvoerig doornemen wat iedereen heeft opgeschreven. Het

belangrijkste is het waarnemen. Het zou eerlijk zijn als iedereen een keer docent zou moeten zijn. Het lijkt praktischer dat telkens twee de docentenrol samen voorbereiden. De ene speelt dan docent, de ander is observant.

Leerproces. In de cursus moet de voortschrijding van het leerproces aandacht krijgen. De docenten moeten leren hoe ze met het onderwijzen van wiskunde A aan leerlingen moeten omgaan. In de cursus moet niet telkens aan het begin van een hoofdstuk (onderwerp) worden begonnen. Ook een 'midden'les en 'afronding voor het proefwerk' moeten aan de orde komen. Het lijkt me een goed idee dat cursisten in tweetallen een proefwerk samenstellen en dat als bovenbeschreven bespreken met de grotere groep.

Rol van de docent. Het werk van een docent is ook: waarnemen wat de leerlingen doen en daaruit conclusies trekken over de soort aandacht die de leerlingen nodig hebben zodat hun leerproces voortgaat. Dat zou bij zo's observatie-opzet van de nascholing goed geoefend worden.

Waaraan zou je behoefte hebben als ondersteuning bij het omgaan met de 'toepassingen'?

Ik verwacht geen problemen met de stof. Op de cursus zou ik dan ook geen college behoeven, behalve als het onderwerp ècht nieuw is. Waarop ik met het zelfstandig voortschrijdend werken van de leerling vastloop, is de geringe stapgrootte bij het doorwerken van problemen. Dat is niet na te bespreken en interesseert de leerlingen niet meer. Ik heb daarvoor behoefte aan goede antwoordenlijsten. Nakijken van opgaven moet snel en efficiënt kunnen gebeuren. Leerlingen hebben soms moeite om, met de vele stappen, de essentie van het probleem te gaan overzien. In de leerstof is het van belang dat de kleine wiskundige abstractie goed geformuleerd wordt; in het leerproces moet het nabespreken daarvan aandacht krijgen, daar gaat het om. En laat ze dan het nakijken van al die kleine stapjes maar zelf regelen.

Is er toch iets wat je aantrekt in de nascholing?

Ja, de nieuwe gezichtspunten die je wel zult tegenkomen. Van je eigen collega's ken je de blikrichting al; het lijkt me leuk om met mensen van andere scholen samen te werken.

Boekbesprekingen

Sequentielle Schätzverfahren, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 1981 (Studien zur angewandten Wirtschaftsforschung und Statistik aus dem Institut für Statistik und Ökonometrie der Universität Hamburg; Heft 11)

Dit boekje is de dissertatie van de schrijver. In de eerste vier hoofdstukken worden een aantal begrippen uit de sequentiële beslissingstheorie besproken. In de hoofdstukken 5 t/m 8 komen schattingsproblemen voor de parameters van vier speciale verdelingen aan de orde. Slechts enkele bewijzen worden gegeven. Veelal wordt verwezen naar de literatuur.
De laatste 60 bladzijden bevatten simulatie-resultaten voor de verdeling van de optimale steekproeflengte en efficiency en risico indien verschillende criteria gehanteerd worden.

J. L. Mijnheer

George Alexits, *Approximation Theory* (selected papers); ed. by K. Tandori; co-editors: D. Královik, L. Leindler, F. Schipp and J. Szabados. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983, 298 pp., $ 24,–.

De kern van het boek wordt gevormd door een 34-tal artikelen van Alexits, die voor het grootste deel betrekking hebben op onderdelen van de approximatietheorie; met name dienen dan genoemd te worden Fourieranalyse, en het karakteriseren van klassen van functies uitgaande van bepaalde informatie over de kwaliteit van benadering met behulp van trigonometrische polynomen. De artikelen, voor het overgrote deel daterende van na 1950 en bijeengebracht uit verschillende tijdschriften en congresverslagen, zijn geschreven in het Duits (15), het Engels (14) en het Frans (5). Alexits (1899-1978) is o.a. de auteur van het bekende boek 'Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen', en nam na de Tweede Wereldoorlog een vooraanstaande plaats in in het wiskundige leven in Hongarije. De aan het begin van het boek opgenomen, zeer lezenswaardige, levensbeschrijving van Alexits geeft daarvan een goed beeld. Daarin wordt ook melding gemaakt van Alexits' bijdragen over János Bolyai, bekend Hongaars wiskundige uit de negentiende eeuw. Eveneens opgenomen is een overzicht van het volledige wiskundige oeuvre van Alexits (naast een aantal boeken een totaal van 88 artikelen). Tenslotte hebben de redacteuren nog een, voor de specialisten op dit terrein, zeer nuttige sectie samengesteld, waarin wordt ingegaan op het belang van sommige van Alexits' resultaten en hoe deze aanleiding hebben gegeven tot verder onderzoek. Besloten wordt met een lijst van errata. Het, zeer verzorgde, boek is een waardig eerbetoon aan het leven en werken van deze begaafde en sympathieke wiskundige.

F. Schurer

Moeten de normen bij het CSE een transformatie ondergaan?

Hans Daale

Het is aardig om te kunnen constateren dat er zo af en toe een discussie op gang dreigt te komen over de normen, die worden gehanteerd bij het centraal schriftelijk eindexamen. De examenstof mag dan in de afgelopen jaren niet of nauwelijks veranderd zijn, afgezien van de HEWET-plannen, maar wel is aan de hand van genoemde normen een aantal accentverschuivingen te constateren.
Het onderwerp Lineair Programmeren op het havo, later omgedoopt in Maximaliseren, minimaliseren (termen uit Moderne Wiskunde) is een voorbeeld daarvan en dhr. L. A. Rang roert er ook één aan in het februarinummer van Euclides (59 (1983/1984), p. 209-291).

Vereenvoudiging

Hij levert kritiek op de verplichting om aan te kunnen geven hoe de grafieken van de functies $x \rightarrow a \cdot \sin(bx + c) + d$ en $x \rightarrow a \cdot \cos(bx + c) + d$ uit de standaardgrafieken kunnen worden afgeleid, hetgeen elke keer een vaste rits transformaties vergt.
Zijn eindconclusie is mij uit het hart gegrepen n.l. dat de voorschriften in deze gevallen aan vereenvoudiging toe zijn.
Op deze plaats wil ik eveneens pleiten voor soortgelijke aanpassing voor een aantal andere functies; ik kom daar op terug.

Kanttekeningen

Eerst wil ik ingaan op het alternatief van dhr. Rang. Hij stelt voor om bij de hierboven genoemde goniometrische functies alleen de originelen van de maxima c.q. minima, afhankelijk van parameter a, te laten berekenen en verder de eigenschappen van de sinusoïde te gebruiken. Op zichzelf een uitstekend idee waarbij twee kanttekeningen te maken zijn.
De eerste is heel persoonlijk. Ik laat de leerling de functie altijd zo herschrijven dat de parameter b positief is. Het voorbeeld van dhr. Rang: $f: x \rightarrow -1\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{3}\pi - 2x) + 1$ wordt dan $f: x \rightarrow 1\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{2}{3}\pi) + 1$. Het is een kleinigheid maar de leerling is volgens mij gebaat bij elke standaardisatie; de goniometrie vinden ze toch al moeilijk genoeg.
De tweede opmerking is, dat een van de laatste stappen, het één eenheid onder de lijn $y = 1$ tekenen van de X-as, moeilijkheden oplevert bij het maken van meerdere grafieken in hetzelfde assenstelsel. Dit is op te lossen door in het assenstelsel de lijn $y = 1$ te tekenen en die het etiket 'alternatieve X-as' op te plakken.

'Nulpunten'

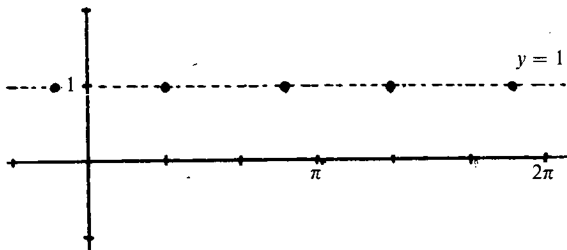
Voortbordurend hierop ligt het voor de hand (is het beter?) om de leerling de snijpunten met de alternatieve X-as te laten bepalen. Je komt daarmee een heel eind tegemoet aan de kritiek die ongetwijfeld geuit zal worden op het feit, dat in het voorbeeld van dhr. Rang de (echte) nulpunten van de functie niet worden berekend.
De op te lossen vergelijking wordt derhalve $f(x) = 1$ oftewel

$$\begin{aligned} &\sin(2x - \tfrac{2}{3}\pi) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - \tfrac{2}{3}\pi = 0 \pmod{\pi} \quad \text{(I)} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = \tfrac{2}{3}\pi \pmod{\pi} \quad \text{(II)} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{3}\pi \pmod{\tfrac{1}{2}\pi} \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

Deze berekening toont aan dat een expliciete vermelding van transformaties overbodig is. Kijk maar wat er met de nulpunten van de standaardgrafiek $y = \sin x$ gebeurt; ze verschuiven eerst $\frac{2}{3}\pi$ naar rechts (I naar II) en komen dan op de helft van de afstand tot de Y-as terecht (II naar III).

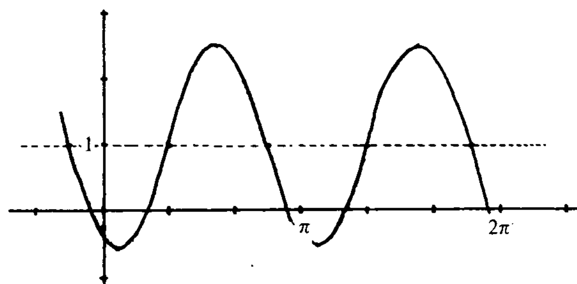
Grafiek

Dat de leerling de twee volgende transformaties kent blijkt bij het gaan opbouwen van de grafiek. Er wordt gestart met, zoals gezegd, het tekenen van de lijn $y = 1$, waarmee de verschuiving over een eenheid naar boven overduidelijk meetkundig is vastgelegd. Op deze lijn worden nu de punten getekend waarvan zojuist de x-coördinaten zijn berekend (fig. 1).



Figuur 1

Het vervolg is de berekening van het snijpunt met de Y-as: $(0, 1 - \frac{3}{4}\sqrt{3})$, hetgeen leidt tot de conclusie dat voor de x-waarde tussen $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{6}\pi$ de functie een minimum bereikt van $-1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$.
De lijnvermenigvuldiging met faktor $1\frac{1}{2}$ vanuit de X-as (vóór de verticale translatie) c.q. de lijn $y = 1$ (ná deze translatie) heeft daarmee ook z'n beslag gehad. De rest van de grafiek is nu 'een fluitje van een cent' (fig. 2).



Figuur 2

Opmerking: Als het snijpunt met de Y-as samenvalt met de oorsprong kan natuurlijk een willekeurige functiewaarde worden bepaald.

Samenvattend

Het onderzoek van de functie en het tekenen van de grafiek omvat dus:

1 Los op: $\sin(bx + c) = 0$ resp. $\cos(bx + c) = 0$;
2 Bereken: $f(0)$ of een andere functiewaarde;
3 Teken de lijn $y = d$;
4 Bepaal met behulp van de uitkomsten van 1 en 2 een hoogste of laagste punt, en teken de grafiek.

De normering kan hierop worden gebaseerd.

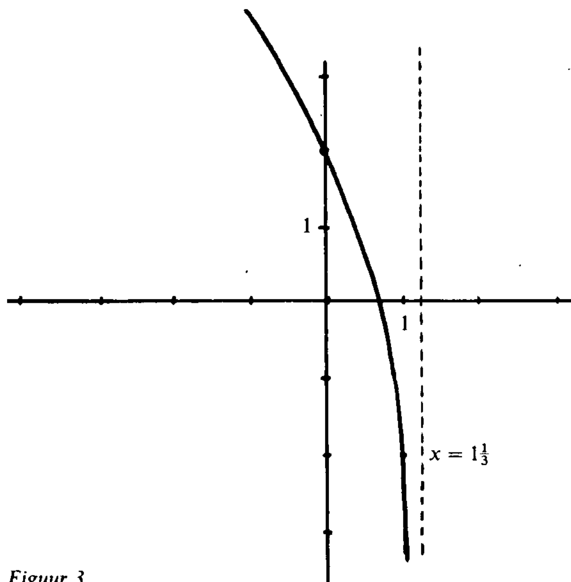
Andere functies

Zoals beloofd wil ik ook suggesties doen voor aanpassing van de normen bij een aantal andere functies. Zoals uiteraard bekend staan de leerlingen twee mogelijkheden open bij het tekenen van de grafiek. Ten eerste, een volledig onderzoek en ten tweede, het geven van de transformaties die de standaardgrafiek moet ondergaan.
We moeten de leerlingen echter leren een functie te herkennen, waarop de tweede mogelijkheid van toepassing is en daarna zich te beperken tot het onderzoek van de kenmerkende eigenschappen.
U krijgt van mij voorbeelden, met steeds een kort commentaar.

I $x \rightarrow a \cdot {}^{g}\log(bx + c) + d$
We nemen hier $f: x \rightarrow 2 \cdot {}^{2}\log(4 - 3x) - 2$

1 Los op: $4 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$
2 Los op: ${}^{2}\log(4 - 3x) = 0$
$\Leftrightarrow \quad 4 - 3x = 1$
$\Leftrightarrow \quad -3x = -3$
$\Leftrightarrow \quad x = 1$
3 Teken de verticale asymptoot $x = \frac{4}{3}$ en het punt $(1, -2)$. Via de bepaling van een aantal andere punten kan de grafiek worden voltooid (fig. 3).

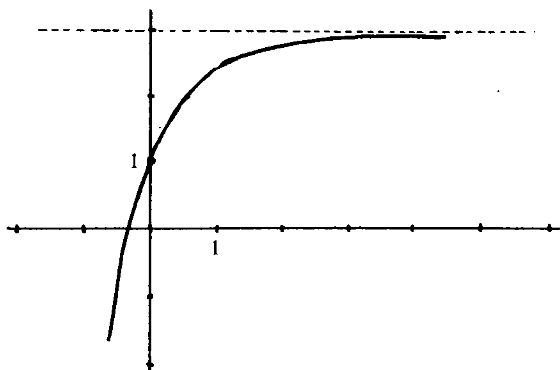
Commentaar: De transformaties zijn vrij snel terug te vinden. De verschuiving over vier eenheden naar links en de lijnvermenigvuldiging vanuit de Y-as met faktor $-\frac{1}{3}$ bij punt 2, en de verschuiving over twee eenheden naar beneden bij punt 3 door het tekenen van $(1, -2)$. De lijnvermenigvuldiging vanuit de X-as met faktor 2 wordt bij punt 3 automatisch meegenomen. Tussen haakjes, een



Figuur 3

functievoorschrift als $x \rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log 3x$ wordt bij mij omgezet in $x \rightarrow -{}^{2}\log 3x$.

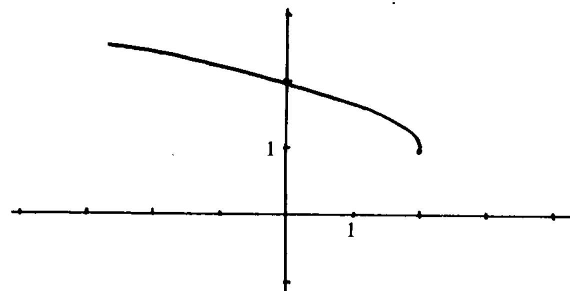
II $x \rightarrow a \cdot x^{bx+c} + d$
Als voorbeeld: $g : x \rightarrow -2^{-2x+1} + 3$
1 Los op: $2^{-2x+1} = 1 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow -2x = -1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
2 Bereken: $g(0) = -2 + 3 = 1$
3 Teken de horizontale asymptoot $y = 3$ en de punten $(\frac{1}{2}, 2)$ en $(0, 1)$. De grafiek kan dan verder worden afgemaakt (fig. 4).



Figuur 4

Commentaar: Zoals de grafiek van de standaardfunctie $x \rightarrow {}^{g}\log x$ altijd de X-as snijdt in $(1, 0)$, gebruikt bij I, snijdt de grafiek van $x \rightarrow g^{x}$ de Y-as in $(0, 1)$; vandaar punt 1 hier.
U kunt zelf wel nagaan dat de vereiste transformaties, algebraïsch dan wel meetkundig, in het onderzoek zijn terug te vinden.
Wederom een tussen haakjes, want een functie als $x \rightarrow (\frac{1}{3})^{x-1}$ wordt getransformeerd in $x \rightarrow 3^{-x+1}$.

III $x \rightarrow a \cdot \sqrt[g]{(bx + c)} + d$
We bekijken in dit geval
$h : x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2x + 4)} + 1$
1 Los op: $-2x + 4 \geqq 0$
$\Leftrightarrow -2x \geqq -4$
$\Leftrightarrow x \leqq 2$
2 Teken het randpunt $(2, 1)$ en daarna de rest van de grafiek (fig. 5).



Figuur 5

Commentaar: Berekening van het domein levert al veel benodigde informatie, inclusief het randpunt. De leerling weet dat het hier om de helft van een liggende parabool gaat, de bovenste helft omdat de parameter a positief is. En aangezien de x kleiner of gelijk aan 2 dient te zijn loopt de grafiek vanaf het randpunt naar links.
Nog even ter geruststelling: De transformaties zitten hier opgesloten in de punten 1 en 2.
Dit voorbeeld laat heel goed zien hoe kan worden ingespeeld op de ervaring van de leerling!

IV $x \rightarrow \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0)$

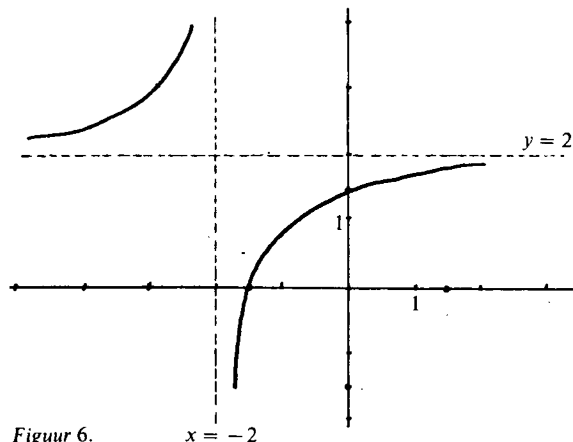
Een voorbeeld van dit soort functies, dat eigenlijk wat afwijkt van de vorige drie, is $x \rightarrow \dfrac{2x + 3}{x + 2}$
1 Verticale asymptoot: $x = -2$

Horizontale asymptoot: $y = \frac{2}{1} = 2$

2 Snijpunt met de X-as: $(-1\frac{1}{2}, 0)$

Snijpunt met de Y-as: $(0, 1\frac{1}{2})$

3 Teken de asymptoten en de punten bij 2 (voorzover ze bestaan), en de rest van de grafiek (fig. 6).



Figuur 6.

Commentaar: Het onderzoek beperkt zich tot de meest relevante dingen van de orthogonale hyperbool.

Conclusie

Leer de leerlingen functies te herkennen waarvan bekend is dat de grafiek via een aantal transformaties uit een standaardgrafiek is af te leiden.
Eis dan niet deze transformaties, maar vraag om een aantal essentiële, bij die grafiek horende, gegevens en baseer dáár dan de normeringen op.

Over de auteur:

Hans Daale is sinds 1971 werkzaam in Assen als wiskundeleraar met name in de bovenbouw havo. Hij geeft ook het vak economie.

Boekbespreking

Rudolf J. Taschner, *Holzwege zur Mathematik I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 358 blz., DM 28,–.

Zoals de ondertitel van dit boek vermeldt, bedoelt dit werk 'Eine Einführung in die höhere Mathematik' te zijn. Het boek is geschreven in en uit de geest van een tekst van Martin Heidegger: 'Holz lautet ein alter Name für Wald. Im Holz sind Wege, die meist verwachsen jäh im Unbegangenen aufhören. Sie heissen Holzwege. Jeder verläuft gesondert, aber im selben Wald. Oft scheint es, als gleiche einer dem anderen. Doch es scheint nur so. Holzmacher und Waldhüter kennen die Wege. Sie wissen, was es heisst, auf einem Holzweg zu sein'.
De schrijver besteedt aan de presentatie van de te behandelen stof een zodanige zorg, dat de lezer zich van de ingevoerde begrippen een goede aanschouwelijke voorstelling kan maken. Het is in het algemeen gesproken noodzakelijk dat de studerende heel precies weet wat abstracte wiskundige begrippen concreet inhouden. In dit eerste deel leert de 'Studienanfänger' zo veel van de differentiaal- en integraalrekening dat hij eenvoudige differentiaalvergelijkingen kan oplossen en convergentieoverwegingen van bijv. Fourier-reeksen kan volgen. Ook wordt een zodanige inleiding in de lineaire algebra en de analytische meetkunde gegeven dat de samenhang tussen abstracte vectorrekening en meetkundige constructie doorzichtig wordt.
Bijzondere aandacht schenkt de schrijver aan de grondslagen van en het rekenen met reële getallen. Vanaf het begin werkt hij met 'fouten' en 'afschattingen'. Limieten staan in het teken van continue voortzettingen van functies.
Overwegingen i.v.m. bijv. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ komen uiteraard ook voor in alle bekende inleidingen in de analyse. Echter, in dit werk is een dergelijke formule geen 'bijprodukt', maar een uitgangspunt voor verdere opbouw van het wiskundig apparaat.
De student krijgt talrijke oefeningen ter uitwerking voorgezet. Niet in de vorm van enige, droge, sommetjes, maar gepresenteerd als werkelijke probleemstellingen. Naar mijn mening is de schrijver met dit werk uitstekend geslaagd in zijn poging studenten een goede propedeuse in de wiskunde te geven. Wiskunde in opbouw, zowel in de richting van de zuivere als in die van de toegepaste zijde van ons vak.
Al met al een prima introductie in de 'hogere wiskunde'. Een werk dat ik gaarne zou willen aanbevelen, ook voor Nederlandse opleidingen. Ik denk hierbij met name aan de eerste-jaarsstudenten van lerarenopleidingen.

W. Kleijne

Rekenvolgorde

J. Koymans

N.a.v. het artikel 'Variabelen en formules in de brugklas; generaliseren' van Ernic Kamerich in Euclides 59, nr. 10, 83/84 juni/juli merk ik het volgende op m.b.t. paragraaf 3: rekenvolgorde (blz. 455).
Het probleem van de nonchalance én de onbekendheid van vele leerlingen met de rekenvolgorde bestrijdt ik al jaren, en ik dacht met sukses, met de introduktie in de allereerste lessen van het begrip term. Hoe mijn aanpak in deze is blijkt uit de eerste les van een stencil.
Ik hoop hiermede bij te kunnen dragen aan de oplossing van dit probleem.

Les 1 Rekenen

3 + 4 noemen we de *som* van 3 en 4. Ook de uitkomst 7 noemen we de som van 3 en 4. Het woord som heeft dus meerdere betekenissen. Het woord som wordt vaak gebruikt voor een opgave die je moet maken.
3 × 4 noemen we het *produkt* van 3 en 4. Ook de uitkomst 12 noemen we het produkt van 3 en 4. Dit woord heeft dus eveneens meerdere betekenissen.
In plaats van het × -teken gebruiken we meestal de · (punt) als we een produkt willen opschrijven. Bijv. $3 \cdot 4$ betekent 3×4; en $5 \cdot 2 \cdot 3$ betekent $5 \times 2 \times 3$.
Optellen en vermenigvuldigen noemen we *bewerkingen*. Andere bewerkingen zijn aftrekken, delen, machtsverheffen en worteltrekken.
'n Som of verschil bestaat uit *termen*. Termen worden gescheiden door een plusteken (+) of door een minteken (−).

Voorbeelden: $3 + 4$ bestaat uit 2 termen;

1e 2e term

en $6 - 4 + 2$ uit 3 termen

1e 2e 3e term

$3 \cdot 4 + 6 : 2$ bestaat uit 2 termen

1e 2e term

We geven voortaan de termen aan met └──┘
Bij een opgave kunnen ook termen tussen haakjes geplaatst worden: bijv. $5 \cdot (3 + 4)$. Onthoud de volgende afspraken goed:

1 vóor het scheiden van de termen tellen we de plus- en mintekens *tussen* de haakjes *niet* mee;
2 we rekenen eerst uit wat tussen haakjes staat.

Voorbeeld: $(4 + 3) \cdot 2 + 3 \cdot (5 - 3) =$
$7 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$

We maken nu een belangrijke afspraak: *Bij elke opgave rekenen we eerst elke term uit!!!* D.w.z. dat *elke* term zo eenvoudig mogelijk opgeschreven moet worden, bijv. niet $3 \cdot 2$ maar 6.

Nadat elke term uitgerekend is gaan we pas optellen en aftrekken, en wel:
OPTELLEN EN AFTREKKEN VAN TERMEN GEBEURT VAN LINKS NAAR RECHTS!!!

Voorbeeld: $8 - 2 + 4 - 5 + 6 =$
$6 + 4 - 5 + 6 = 10 - 5 + 6 =$
$5 + 6 = 11$

Voorbeeld: $3 \cdot 4 + 6 : 2 - 3 \cdot 4 + 6 =$
$12 + 3 - 12 + 6 =$
$15 - 12 + 6 = 3 + 6 = 9$

***Over de auteur*:**

Geboren in 1931 te Kerkrade. Sinds 1965 verbonden aan het college Sancta Maria (H/A) te Kerkrade-West. Als conrector van de brugklassen 1 en 2 (brugperiode) houdt hij zich regionaal bezig met de aansluitingsproblematiek b.o. - v.o. In dit kader een artikel 'Indeling van proefwerken in niveaus' gepubliceerd in Weekblad NGL, 9e jaargang, nr. 46, p. 2017.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

524 Henk en Gert hebben hetzelfde type auto. Hun auto's lopen op Belgische benzine 1 op 12 en op Franse 1 op 10. Op een mengsel stijgt het verbruik evenredig met het percentage Franse benzine. De inhoud van hun tank is 40 liter. Ze moeten in Frankrijk 800 km afleggen.
Aan de Belgisch-Franse grens vullen ze beide hun tank met Belgische benzine. Henk rijdt zijn tank leeg en rijdt daarna op Franse benzine. Gert heeft een extra reservoir. Hij zorgt ervoor dat hier steeds Franse benzine in is. Tussen tank en reservoir bestaat een zodanige communicatie dat continu uit het reservoir de tank bijgevuld wordt, waardoor deze steeds vol blijft.
Wie heeft na de 800 km het grootste aantal liters benzine verbruikt?

525 Een concept-item van het CITO luidde:
Iemand werpt met een gewone dobbelsteen tot hij in totaal minstens 28 ogen heeft gegooid.
Hoeveel worpen zullen hiervoor gemiddeld nodig zijn?
A 5 worpen
B 7 worpen
C 8 worpen
D 9 worpen
Gaarne commentaar.

Oplossing

522 Van Gaspard Bosteels kreeg ik een nieuwjaarwens die bestond uit een getallenvierkant met de getallen 1 tot en met 121 en in het midden het getal 84. Het vierkant is in het vorige nummer afgedrukt. Gevraagd werd de structuur ervan te onderzoeken.
Om een gemakkelijker overzicht te krijgen, schrijven we de getallen in het elftallig stelsel. We krijgen dan de getallen 01, 02, ..., 100. Om van het hinderlijke getal 100 bevrijd te worden, trekken we van alle getallen nog 1 af. We krijgen dan het vierkant hiernaast.

We zien:
Op de onderste rij komen alle eenheden en alle elftallen precies eenmaal voor. De som van de getallen op de onderste rij is dus 550 (ik blijf alle getallen elftallig schrijven).
Bij een paardesprong van 2 naar rechts en 1 naar boven wordt het getal met 10 (mod 100) vermeerderd. Identificeer hierbij de boven- en onderrand van het vierkant en eveneens de linker- en de rechterrand, zodat we kunnen blijven 'doorspringen'.
De som van de getallen van elke volgende rij wordt dus verkregen uit die van de vorige door er $\Delta \cdot 10 + (100 - 10) = 0$ bij op te tellen. De rijsommen zijn daarom gelijk.
De getallen uit de linkerkolom kunnen we door paardesprongen krijgen uit die van de onderste rij. Ze zijn daarom (mod 100) resp. gelijk aan
$69, 0\Delta + 10, 50 + 2 \cdot 10, \Delta 1 + 3 \cdot 10, ..., 18 + \Delta \cdot 10$
Ook in de linker kolom komen alle eenheden en alle elftallen dus eenmaal voor. De som van de getallen in deze kolom is weer 550.
De getallen uit de derde kolom van links krijgen we uit die van de eerste door een paardesprong. Hun som is dus hetzelfde en dit geldt ook voor de overige kolommen.
Nu de diagonalen. We beschouwen eerst de diagonaal 69, 44, ..., 83 en de daaraan evenwijdige diagonalen (denk aan de identificatie van de randen) 93, 79, ..., 22, 08; 18, Δ3, ..., 71, 57, 32; ....
De getallen uit eerstgenoemde diagonaal zijn resp. gelijk aan
$69, 34 + 1 \cdot 10, 0\Delta + 2 \cdot 10, ..., 93 + \Delta \cdot 10$
Weer krijgen we alle eenheden en alle elftallen eenmaal en is de som 550.
Door een paardesprong gaan deze getallen over in die van de direct rechtsgelegen diagonaal. Waaruit volgt dat van de getallen in alle eraan parallel lopende diagonalen 550 is.
Ten slotte behandelen we net zo de getallen in de diagonaal 69, 95, 11, ..., 32. Deze zijn resp. gelijk aan
$69, 85 + 1 \cdot 10, \Delta 1 + 2 \cdot 10, ..., 42 + \Delta \cdot 10$
De som van de getallen in deze diagonaal en ook in de eraan parallel lopende is weer 550.
Hoe construeren we een dergelijk vierkant? Als we de onderste rij getallen gekozen hebben, vinden we de overige met behulp van de paardesprongen. In de onderste rij kiezen we op willekeurige manier de elf verschillende eenheden. De elftallen kunnen we niet willekeurig kiezen. We moeten ze zo kiezen dat ook de elftallen in de linkerkolom, in de diagonaal 69, 44, ..., 83 en in de diagonaal 69, 95, ..., 32 alle verschillend worden.
Noem de elftallen in de onderste rij resp. $a_0, a_1, ..., a_\Delta$
Dan zijn de elftallen in de linkerkolom:

$a_0, a_1 + 5$[1]), $a_2 + 2 \cdot 5, ..., a_\Delta + \Delta \cdot 5$
De elftallen in de diagonaal 69, 44, ..., 83 zijn
$a_0, a_1 + \Delta, a_2 + 2 \cdot \Delta, ..., a_\Delta + \Delta \cdot \Delta$
en die in de diagonaal 69, 95, ..., 32
$a_0, a_1 + 7, a_2 + 2 \cdot 7, ..., a_\Delta + \Delta \cdot 7$

08	32	67	91	16	40	75	ΔΔ	24	59	83
57	81	06	30	65	9Δ	14	49	73	Δ8	22
Δ6	20	55	8Δ	04	39	63	98	12	47	71
45	7Δ	Δ4	29	53	88	02	37	61	96	10
94	19	43	78	Δ2	27	51	86	00	35	6Δ
33	68	92	17	41	76	Δ0	25	5Δ	84	09
82	07	31	66	90	15	4Δ	74	Δ9	23	58
21	56	80	05	3Δ	64	99	13	48	72	Δ7
70	Δ5	2Δ	54	89	03	38	62	97	11	46
1Δ	44	79	Δ3	28	52	87	01	36	60	95
69	93	18	42	77	Δ1	26	50	85	0Δ	34

Aan de eis kan men nu voldoen door a_0 willekeurig te kiezen en dan de getallen $a_1, a_2, ..., a_\Delta$ telkens 2 groter te kiezen (mod 10). Ook kan men ze telkens 3, 5, 7, 8, 9 of Δ groter kiezen (mod 10). Hebben we zo een vierkant geconstrueerd, dan schrijven we de getallen weer tientallig en tellen er 1 bij op.
In 1985 kiezen we als middelste getal 85, hetgeen zonder meer mogelijk is gezien de identificatie van de randen.

Toegift. Op het vierkant met geïdentificeerde randen (torus) zijn meer rechte lijnen mogelijk. Door 69 kunnen we ook nog trekken:
69, Δ5, 31, 78, 04, 40, 87, 13, 5Δ, 96, 22
69, 56, 43, 30, 28, 15, 02, ΔΔ, 97, 84, 71
69, 07, 55, Δ3, 41, 9Δ, 38, 86, 24, 72, 10
69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 6Δ
69, 19, 79, 29, 89, 39, 99, 49, Δ9, 59, 09
69, 7Δ, 80, 91, Δ2, 03, 14, 25, 36, 47, 58
69, 20, 92, 54, 16, 88, 4Δ, 01, 73, 35, Δ7
69, 81, Δ4, 17, 3Δ, 52, 75, 98, 00, 23, 46
(Er zijn nog veel meer dergelijke lijnen, zoals 69, 54, 4Δ, ..., 73, maar die bestaan alleen maar uit een permutatie van de punten van bovengenoemde.)
De elftallen in deze lijnen zijn $a_k + ki$ met resp. i = 3, 6, 1, 8, –, 2, 9, 4. De vijfde lijn is niet te schrijven in de vorm $a_k + ki$, omdat de eenheden erin constant zijn. In de vierde lijn is $i = 8$. Omdat in ons voorbeeld de getallen a_k met 3 opklimmen en $3 + 8 = 10$, zijn in de vijfde lijn de elftallen constant. Voor alle andere lijnen geldt dus dat de som van de getallen erin 550 is. Hetgeen dan automatisch ook geldt voor de lijnen die eraan parallel zijn.
We hebben hier te maken met een 'super-magisch' kwadraat. Men kan zo meer super-magische kwadraten maken met 11^2 getallen en meer algemeen met p^2 getallen (p priem).

[1]) Uitgaande van 93 kom je in 5 paardesprongen in de eerste kolom terecht, nl. bij 33. Uitgaande van 18 kom je in Δ paardesprongen bij 08, enz.

Mededelingen

Vrouwen en Wiskunde

Op zaterdag 30 maart zal de zevende landelijke dag van de groep 'Vrouwen en Wiskunde' gehouden worden in Cunera, Nieuwe Gracht 32, Utrecht, van 9.30 uur tot 17.00 uur.
Thema's van de dag zijn:
1 Terugblik op de Studiedag van de NVvW op 27 okt. 1984 die werd georganiseerd door de groep Vrouwen en Wiskunde.
2 Wiskunde verplicht?
Voor verdere informatie: Marijke Melis, tel. 04950-3 46 62.

Examenbesprekingen lbo, mavo, havo, vwo 1985

De examenbesprekingen voor havo en vwo worden dit jaar gehouden op dinsdag 7 mei 1985.
De examenbesprekingen voor lbo en mavo worden gehouden op vrijdag 10 mei 1985 evenals de bespreking van het examen wiskunde II voor vwo.
Aanvangstijd en plaats worden in een volgend nummer van Euclides bekend gemaakt.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1985	
28 feb t/m 2 mrt:	B-conferentie, Ede
wo 6 mrt:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
vr 22 mrt:	eerste ronde Ned. Wisk. Olympiade
23 mrt:	gem. studiedag NVvW, VVWL, Kapellen (B)
28 t/m 30 mrt:	E-conferentie, Ede
za 30 mrt:	landelijke dag Vrouwen en Wiskunde
wo 3 apr:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
di 7 mei:	examenbesprekingen voor havo en vwo
vr 10 mei:	examenbesprekingen voor lbo, mavo; vwo wiskunde II
wo 15 mei:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
22 t/m 26 juli:	conferentie IGPME, Noordwijkerhout
vr 13 sep:	tweede ronde Ned. Wisk. Olympiade
1986	
11-16 aug:	ICOTS II, Victoria BC, Canada

Inhoud

Adressen van auteurs

Hans Aalmoes, p/a CPS Postbus 80,
3870 CA Hoevelaken

Ir G. J. T. A. Bakx, Bolkskamp 21,
7576 GH Oldenzaal

Tineke Brinkman, Breehoven 34,
6721 SN Bennekom

Sieb Kemme, p/a WSN Landleven 5, Groningen

J. Koymans, de Kommert 81, 6419 GB Heerlen

Iet Markusse, Middelmeet 63, 4464 AZ Goes

J. M. Notenboom, p/a SOL Postbus 14007,
3508 SB Utrecht

S. P. van 't Riet, Vordensebeek 88,
8033 DG Zwolle

J. Scheltens, Zuidsingel 84,
4331 RV Middelburg